

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE MINAS
GERAIS – CAMPUS BETIM
BACHARELADO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

DIOGO ALEXANDRE SILVA SANTOS

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA APLICADO NO
DESENVOLVIMENTO DE UMA ENGRENAGEM CILÍNDRICA DE
DENTES RETOS**

BETIM

2022

DIOGO ALEXANDRE SILVA SANTOS

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA APLICADO NO DESENVOLVIMENTO DE
UMA ENGRENAGEM CILÍNDRICA DE DENTES RETOS**

Trabalho de conclusão de curso
apresentado ao Curso Bacharelado
em Engenharia Mecânica do Instituto
Federal de Minas Gerais - Campus
Betim para obtenção do grau de
bacharel em Engenharia Mecânica.
Orientador: Evanilton Barbosa

BETIM

2022

FICHA CATALOGRÁFICA

S237o Santos, Diogo Alexandre Silva

Otimização topológica aplicado no desenvolvimento de uma engrenagem cilíndrica de dentes retos / Diogo Alexandre Silva Santos. – 2022.

55 f.: il.

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado em Engenharia Mecânica) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais, Câmpus Betim, 2022.

Orientação: prof. Evanilton José Alves Barbosa.

1. Método dos elementos finitos. 2. Otimização topológica.
3. Engrenagens. Diogo Alexandre Silva Santos. II. Título.

CDU: 624.4

Ficha catalográfica elaborada pelo Bibliotecário Denísio P. Marcos CRB-6/3142

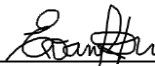
DIOGO ALEXANDRE SILVA SANTOS

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA APLICADO NO
DESENVOLVIMENTO DE UMA ENGRENAGEM CILÍNDRICA DE
DENTES RETOS**

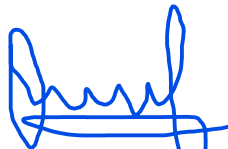
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Engenharia Mecânica do Instituto Federal de Minas Gerais Campus Betim como requisito parcial à obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Aprovado em: 01/09/2022 pela banca examinadora:

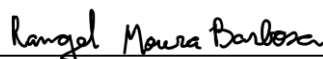
BANCA EXAMINADORA



Prof. Me. Evanilton José Alves Barbosa
(Orientador) IFMG Campus
Betim



Prof. Dr. Hélio Luiz Simonetti
IFMG Campus Betim



Prof. Me. Rangel Moura Barbosa
UNICAMP

Dedico aos meus amados familiares -
mãe, pai, irmãos e sobrinho. - Meus
maiores incentivadores e fontes
inesgotáveis de apoio, amor e
compreensão.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado a oportunidade de fazer minha primeira graduação, agradeço aos meus pais e irmãos por ter me dado todo apoio para chegar até aqui, agradeço meus familiares e a todos que contribuíram diretamente ou indiretamente no meu desenvolvimento.

Agradeço meu orientador, mestre Evanilton José Alves Barbosa, pela dedicação e paciência na jornada de produção deste trabalho.

Agradeço aos colegas de curso pelo companheirismo nestes anos árduos da graduação.

Agradeço aos professores e servidores do IFMG-Betim pelo ensino de excelência que tive o privilégio de ter.

RESUMO

A busca para obter maneiras de se produzir peças mais baratas e eficientes, é uma constante nas indústrias. Neste contexto, o método de elementos finitos e otimização topológica mostram-se muito úteis. O método dos elementos finitos é utilizado para a modelagem de um problema genérico que envolve meios contínuos, por meio da análise de partes discretizadas, para os quais é possível conhecer ou obter uma descrição matemática do seu comportamento. Tal método é fundamental para a realização de uma otimização topológica. Já a otimização topológica busca obter a melhor geometria da peça, adicionando e removendo material, a fim de se obter uma peça mais leve e/ou mais resistente. Com base nisso, o presente trabalho buscou a melhor geometria para uma engrenagem cilíndrica de dentes retos, tornando-a mais leve do que a engrenagem original. Tais engrenagens são peças cilíndricas retas dotadas de dentadura externa com finalidade de transmitir movimento.

Palavras-Chave: Engrenagem cilíndrica de dentes retos, Otimização topológica, Elementos finitos

ABSTRACT

The search for ways to produce cheaper and more efficient mechanical parts is a constant in industries. In this context, finite element and topological optimization methods are very useful. The finite element method is used to model a generic problem that involves continuous media, through the analysis of discretized parts, for which it is possible to know or obtain a mathematical description of their behavior. This method is fundamental for performing a topological optimization. Topological optimization, on the other hand, seeks to obtain the best part geometry, relocating and removing material, in order to obtain a lighter and/or stronger part. Based on this, the present work sought the best geometry for a cylindrical spur gear, making it lighter than the original gear. Such gears are straight cylindrical parts equipped with external teeth for the purpose of transmitting movement.

Keywords: Spur cylindrical gear, Topology Optimization, Finite Elements.

LISTAS

LISTAS DE FIGURAS

- Figura 1 - Método das seções aplicados a uma viga engastada
- Figura 2 - Malha gerada no par de engrenagens para análise de tensão e deformação
- Figura 3 - Discretização de uma chapa tracionada
- Figura 4 - Formas de alguns elementos finitos
- Figura 5 - exemplo de solução convergindo para a solução analítica
- Figura 6 - Refino de malha em uma viga
- Figura 7 - Fluxograma do processo de otimização topológica
- Figura 8 - Etapas da otimização topológica
- Figura 9: exemplo de dependência de malha
- Figura 10 - exemplo de resultado ótimo com a instabilidade numérica do padrão de tabuleiro de xadrez
- Figura 11 - Otimização topológica de um suporte hipotético
- Figura 12 - Parâmetros engrenagem de dentes retos
- Figura 13 - Parâmetros para rasgo de chavetas
- Figura 14: Aproximação do dente de engrenagem com uma viga engastada
- Figura 15 - Engrenagem antes da otimização
- Figura 16 - Malha gerada para a realização da OT
- Figura 17 - Entrada dos dados no software antes da OT
- Figura 18 - Resultado tensão de Von Misses na engrenagem antes da OT
- Figura 19 - Deformação máxima da engrenagem antes da OT
- Figura 20 - Resultado da OT
- Figura 21 - Modelo 3D da nova engrenagem
- Figura 22 - Entrada dos dados para a validação da OT
- Figura 23 - Malha gerada para a validação da OT
- Figura 24 - Validação da deformação máxima da engrenagem após OT
- Figura 25 - Validação do resultado tensão de Von Misses na engrenagem após OT
- Figura 26 - Versão final da engrenagem
- Figura 27 - Detalhamento da engrenagem antes da OT
- Figura 28 - Detalhamento da engrenagem depois da OT

LISTA DE TABELAS

- Tabela 1 – Parâmetros engrenagem de dentes retos
- Tabela 2 – Parâmetros do rasgo de chaveta
- Tabela 3 – Composição química do aço 1045
- Tabela 4 – Propriedades do aço 1045
- Tabela 5 – Parâmetros de esforços na engrenagem
- Tabela 6 - Comparação dos resultados da otimização

LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIações

- A - Conjunto específico de números reais
- c – Flexibilidade
- E_0 - Módulo de Young original do material na fase sólida
- \mathbf{f} – Vetor de carregamento global
- f – Função genérica
- \mathbf{F} - Vetor global de força
- F_x – Força atuante no eixo X
- F_y - Força atuante no eixo Y
- \mathbf{K} - Matriz de rigidez global
- \mathbf{k}_0 - Matriz de rigidez elementar para um elemento com Módulo de Young unitário
- \mathbf{K}_e - Matriz de rigidez de um elemento de um material sólido
- M – Momento de uma força
- MEF – Método de Elementos Finitos
- \mathbf{N} - Conjunto das funções de interpolação
- N_i - i -ésima função de interpolação
- OT – Otimização Topológica
- \mathbf{u} - Conjunto dos parâmetros nodais
- u - Variável primária
- \mathbf{u} - Vetor de deslocamento
- \mathbf{U} - Vetor de deslocamento global
- \mathbf{u}_e - Vetor deslocamento dos nós do elemento
- V_0 - Volume inicial referente ao domínio
- \mathbf{x}_e - Vetor de densidades dos elementos
- ρ - Vetor densidade.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	13
1.1 Justificativa	15
1.2 Objetivo Geral.....	16
1.3 Objetivos Específicos	16
2. REFERENCIAL TEÓRICO	17
2.1 Conceitos e Leis Fundamentais do Equilíbrio Estático	17
2.2 Método dos Elementos Finitos.....	18
2.2.1 Metodologia de Análise Estrutural.....	21
2.2.2 Otimização Topológica.....	26
3. MATERIAIS E MÉTODOS	35
3.1 Características e aplicações do Componente	35
3.2 Pré Processamento.....	39
3.3 Solução e Pós Processamento	41
3.4 Resultados e Discussões	41
4. CONCLUSÃO	50
5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	51
6. APÊNDICE	55

1. INTRODUÇÃO

A melhoria e aumento do desempenho dos materiais e conseqüentemente dos processos e produtos, tem sido uma das metas de empresas que visam a redução de custos e aumento da competitividade. No campo de desenvolvimento de novos produtos, as ferramentas CAD (desenho auxiliados por computador), CAE (engenharia assistida por computador) e CAM (manufatura auxiliada por computador), exercem papéis fundamentais para a criação, testes e validação de modelos virtuais, que simulam situações próximas da realidade. A busca por modelos virtuais que simulem situações reais e Otimizações Topológicas – OT, segundo Andreassen (2011), é uma crescente mundial nos diversos segmentos industriais.

As OT são ferramentas muito úteis para engenheiros que desejam reduzir a massa de uma peça projetada e/ou aumentar a rigidez da mesma. Segundo Amorim (2017), as OT, são ferramentas incorporadas no universo CAE que avaliam e identificam regiões menos solicitadas, auxiliando o projetista na adequação geométrica do produto sem comprometer a resistência estrutural do componente.

Os métodos de OT são, em síntese, ferramentas que possibilitam determinar a localização do material estrutural mais eficiente, dentro do domínio fixo estendido.

No cenário atual, é de grande interesse encontrar a melhor geometria de uma peça utilizando a menor quantidade de material, sem fazer uma estrutura perder sua rigidez. Segundo Candido (2017), os métodos de OT buscam obter a solução ótima para os problemas de engenharia, respeitando as especificações técnicas dos projetos. Por isso ela se mostra uma ferramenta muito útil.

Reduzir material em uma estrutura, mantendo a sua rigidez e a resistência aos esforços solicitados é uma busca que se iniciou no século XIX por Maxwell, onde ele buscava o menor volume para estruturas uniaxiais submetidas a carregamentos (SANT'ANNA, 2002).

Tendo em mente a busca pela redução de material em uma estrutura, o conhecimento em OT, modelagem 3D e elementos finitos, tornou-se imprescindível nesse cenário. OT, segundo Sanches (2011), é a identificação da melhor distribuição de material em uma determinada região preestabelecida, espaço de busca, quando a estrutura estudada possui restrições de projeto. Tais restrições podem ser: volume, deslocamentos, taxas de deformações, frequências naturais, entre outras.

A busca pela redução de custos é uma constante em todos os segmentos da sociedade. Tornar uma peça mecânica mais barata e aumentar o seu desempenho é algo de importância para a competitividade das indústrias mecânicas, automotiva, naval, entre outras. Neste contexto, técnicas de *downsize*, técnica que prevê Segundo Chiavaneto (2003), a produção “enxuta”, o que significa produzir com menos material e/ou mão de obra. Tal técnica destaca-se uma vez que a produção com menos material torna o produto mais economicamente atrativo, além dos ganhos em desempenho, uma vez que a peça está mais leve, todo o sistema a que ela está ligada também fica mais leve. Logo, será necessário menos energia para movimentar este sistema, tornando-o mais eficiente.

Métodos alternativos de se projetar peças, métodos auxiliados por computadores utilizando soluções numéricas, segundo Alves Filho (2013), se tornam interessantes do ponto de vista econômico e de engenharia. Tendo em vista que os modelos convencionais, modelos que projetam peças resolvendo analiticamente as equações pertinentes para o problema, não maximizam todo o potencial do material que compõem a peça projetada. Neste contexto, o entendimento dos Métodos dos Elementos Finitos - MEF se mostra imprescindíveis, uma vez que tal método mostra-se robusto quando se busca realizar uma OT.

O MEF segundo Azevedo (2003), é utilizado para a modelagem de um problema genérico que envolve meios contínuos, por meio da análise de partes discretizadas, para os quais é possível conhecer ou obter uma descrição matemática do seu comportamento.

Dentro dos diversos produtos feitos pela indústria mecânica, um que se destaca é a engrenagem. As engrenagens se destacam por seu grande uso e aplicações. Segundo Melconian (2014), engrenagem pode ser entendida como peça de formato cilíndrico (engrenagem cilíndrica), cônico (engrenagem cônica) ou reto (cremalheira), dotada de dentadura externa ou interna, cuja finalidade é transmitir movimento sem deslizamento e potência, multiplicando os esforços com a finalidade de gerar trabalho.

As engrenagens segundo Ramadani et al (2018), são partes vitais da maioria das transmissões de potência mecânica. Além disso, são os meios mais comuns de transmissão de torque. Segundo Pimpalte & Shilwant (2017), as engrenagens também têm como função alterar a taxa de rotação do eixo de máquinas e alterar o eixo de rotação. Dentre as diversas aplicações das engrenagens, uma muito corriqueira no dia a dia está nos automóveis. Nesta aplicação, as engrenagens convertem a alta velocidade fornecida pelo motor em uma saída com menor velocidade e maior torque ou vice-versa.

Para que se tenha um design eficaz de engrenagem segundo Pimpalte & Shilwant (2017), a mesma deve suportar força aplicada nela, ter boa durabilidade, confiabilidade, tamanho, peso e custo. Segundo Ramadani et al (2018), com as crescentes demandas em redução de peso e downsizing, a OT que busca a minimização de peso mostra-se muito útil para este fim.

Após o exposto, pode-se questionar se os métodos alternativos de projetar peças mecânicas são de fato melhores comparado aos métodos tradicionais. O presente trabalho buscará mostrar empiricamente a resposta para este questionamento.

1.1 Justificativa

As indústrias buscam melhorias nos processos produtivos, por meio de uma produção mais enxuta e eficiente, com produção de peças menores, mais leves, eficientes e economicamente viáveis. A otimização se apresenta como o caminho seguro, devido ao recurso tecnológico, graças ao desenvolvimento de

ferramentas de CAD e CAE, consagradas e reconhecidas pelo mercado de engenharia. No entanto demanda alto nível de conhecimento técnico.

Os métodos de otimização topológicos, mostra-se muito útil para se alcançar o objetivo de produzir peças menores, mais leves, mais eficiente e, conseqüentemente mais economicamente atrativa, devido a sua robustez e resultados obtidos.

O presente trabalho utilizará ferramentas de CAD e CAE, aumentando a bibliografia disponível com esta temática. Além disso, abordará um tema específico dentro dos CAE, otimização de forma, com isso possibilitará a difusão do tema. Desta forma, este trabalho poderá ser um guia para futuros engenheiros que queiram aprender sobre o tema.

1.2 Objetivo Geral

Este trabalho como objetivo geral fazer um estudo de caso para se projetar uma engrenagem, utilizando otimização topológica para se obter uma geometria otimizada.

1.3 Objetivos Específicos

Este trabalho tem como objetivos específicos:

- Desenvolver análise por elementos finitos;
- Gerar um modelo CAD;
- Identificar o material mais adequado;
- Interpretar resultados da análise;
- Identificar pontos de menores solicitações;
- Aplicar condições de contorno;
- Definir o elemento para discretização do contínuo;
- Definir pontos de alívio.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Conceitos e Leis Fundamentais do Equilíbrio Estático

A resistência e a rigidez segundo Almeida (2009), podem ser definidas como: resistência é a capacidade de transmitir as forças internamente, molécula por molécula, dos pontos de aplicação aos apoios, sem que ocorra a ruptura da estrutura. Já a rigidez pode ser definida como a capacidade de não deformar excessivamente, para o carregamento previsto, o que comprometeria o funcionamento e o aspecto da estrutura.

O conceito de estrutura embora pareça ser simples e difundido, cabe ser apresentado formalmente como: composição de uma ou mais peças, ligadas entre si e ao meio exterior de modo a formar um sistema de equilíbrio. (ALMEIDA, 2009). Expandido um pouco mais este conceito, pode-se entender uma estrutura segundo Almeida (2009), como sendo um conjunto capaz de receber solicitações externas, absorve-las internamente e transmiti-las até seus apoios, onde encontram um sistema de forças externas equilibrantes, conhecidas como forças reativas.

Para se executar um bom projeto mecânico, tem-se que analisar diversos parâmetros, tais como o design da peça, centro de gravidade, esforços ao qual a peça será submetida, (torção, tração, cisalhamento, momento, tensões, flambagem, fadiga entre outros). Segundo Hibbler (2011), um sistema está em equilíbrio, quando obedece ao sistema de equações (1) e (2) representado abaixo:

$$\Sigma F=0 \quad (1)$$

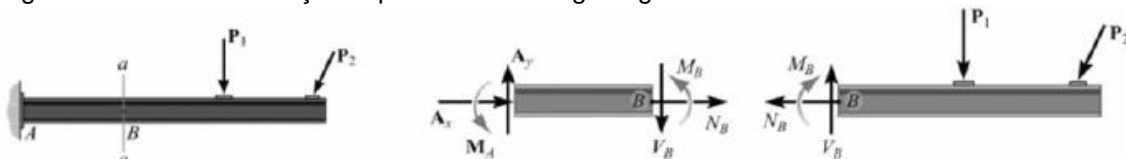
$$\Sigma M=0 \quad (2)$$

Nas equações (1) e (2) as letras F e M significam força e momento respectivamente.

Em um projeto mecânico, para se dimensionar um elemento estrutural deve-se conhecer a carga atuante dentro do mesmo, com o objetivo de garantir que o material resista aos esforços. Segundo Hibbler (2011), as cargas internas podem ser determinadas usando o método das seções. Este método se baseia no fato

de que se uma estrutura está em equilíbrio, então qualquer segmento dela também está em equilíbrio. A figura 1 exemplifica o exposto.

Figura 01: Método das seções aplicado à uma viga engastada



FONTES: HIBBELER, 2011.

A figura acima está em equilíbrio estático se o somatório das forças ativas e dos momentos gerados por ela forem iguais ao somatório das forças reativas e dos momentos gerados por ela correspondentes. Ao se dividir a mesma em seções separando-as de acordo com as forças solicitantes, cada segmento está também em equilíbrio.

2.2 Método dos Elementos Finitos

O uso das ferramentas CAE é de extrema importância na utilização da OT. Segundo Bendsøe e Kikuchi (1988), vários fornecedores de software de programas de uso geral de elementos finitos estão introduzindo módulos de otimização de forma, com base na implementação bem-sucedida da análise de sensibilidade para dimensionar problemas de otimização de design em tais códigos. A sensibilidade segundo Guilherme (2006), pode ser entendida como o gradiente de uma função em relação as variáveis de projeto, e é de extrema importância no processo de otimização, uma vez que os algoritmos de programação matemática precisam dos gradientes da função objetivo e das restrições em relação às variáveis de projeto para determinar a direção de busca. Com isso pode-se concluir que a OT combina MEF e equações matemáticas de otimização, objetivando a melhor distribuição de material e/ou melhor forma da peça projetada.

A busca por um projeto mais otimizado requer o uso de alguma melhoria nas técnicas convencionais. Uma técnica para se ter um projeto mais eficaz é a OT. Segundo Coutinho (2006), O método de OT pode ser definido como um processo de determinação de máximo ou mínimo de uma função denominada função

objetivo. Para que um projeto esteja adequado, ele tem que satisfazer alguns conjuntos de requisitos específicos, que são conhecidos como restrições do projeto. A função objetivo e as restrições de projeto podem ter características de análise ou de síntese de projeto.

Devido à grande gama de variáveis, a solução analítica do problema torna-se muito dispendiosa ou até mesmo impossível. Desta maneira, métodos iterativos são muito úteis em tais casos. Entre os diversos métodos iterativos, destaca-se o MEF, que segundo Lotti et al (2006), pode ser definido como análise matemática que discretiza um meio contínuo em pequenos elementos, mantendo as mesmas propriedades do meio original. Esses elementos são descritos por equações diferenciais e resolvidos por modelos matemáticos, para que sejam obtidos os resultados desejados.

O MEF é a mais eficiente ferramenta numérica de resolução de equações diferenciais com condições de contorno. Por esse motivo, este método é amplamente usado em problemas de Engenharia. Uma vez que esses problemas podem ser descritos como modelos matemáticos de sistemas físicos contínuos. Segundo Soriano (2009), a matéria pode ser idealizada como uma distribuição contínua, formada por infinitesimais pontos de matéria, adjacente uns aos outros, mas tendo a propriedade de se afastar sem formar vazios e de se aproximarem sem se sobrepor, denominada meio contínuo. A partir desta definição, de fenômenos físicos e da propriedade dos materiais, obtém-se equações matemáticas que modelam o comportamento deste meio. Com base nessas equações pode-se modelar o comportamento da matéria, que será imprescindível na modelagem numérica de uma estrutura.

A análise dos problemas mecânicos norteia-se nas condições de contorno imposta pelo projeto. O resultado dessa análise, segundo Vitorio (2014), é dado pela relação entre as tensões e deformações do tipo de material empregado. Encontrar tais resultados depende da complexidade do problema. Quando o problema é de simples solução, a solução analítica é viável. Porém, quando o problema é complexo, é necessário lançar mão de métodos numéricos/computacionais para solucioná-los.

Expandindo o entendimento do MEF, segundo Vitorio (2014), eles representam o comportamento mecânico de corpos contínuos por meio de elementos e nós que são entidades discretas. O MEF é uma técnica numérica que possui aproximação no domínio do corpo, onde a mesma é feita sobre as equações de campo que regem o problema. As soluções encontradas representam aproximações das grandezas e respeitam aproximadamente as equações de campo. Encontra-se a solução através de um sistema de equações cujas incógnitas estão tanto no domínio como no contorno do problema.

Este método inicia-se usando leis simples, geralmente polinômios, para as variáveis que dão origem a outras variáveis por meio de derivações, denominadas variáveis dependentes primárias. Estas variáveis estão contidas em subdomínios denominados elementos finitos. Segundo Soriano (2009), estes elementos substituem às leis exatas de solução do modelo matemático, que são desconhecidas, e de maneira a se ter continuidade nas interfaces dos elementos, na grande maioria dos desenvolvimentos. Os elementos estão conectados através dos pontos nodais em seus contornos e, como as leis que regem o problema que se busca a solução são arbitradas em função dos parâmetros nodais, infinitos pontos do modelo matemático contínuo são substituídos por um número finito de pontos. Tal processo é chamado de discretização do modelo matemático contínuo. Este procedimento, segundo Soriano (2009), sob uma condição matemática que garanta que a solução aproximada obtida convirja para a solução do modelo matemático original, na medida em que se reduz o tamanho dos elementos ou se aumente a ordem das leis arbitradas para as referidas variáveis. Além disso, para que esses elementos possam interagir entre si, as leis que regem o problema interpolam parâmetros nodais das variáveis primárias e algumas vezes as derivadas das variáveis primárias.

De forma genérica, segundo Soriano (2009), um problema contendo apenas uma variável primária pode ser descrito pela equação 3, onde u é a variável primária, as notações em negrito indicam matrizes e o sobrescrito entre parênteses denota elemento. Logo, na equação 3, N_i é a i -ésima função de interpolação, u_i é o i -ésimo parâmetro nodal, \mathbf{N} representa o conjunto das funções de interpolação e \mathbf{u}^e , é o conjunto dos parâmetros nodais. Para que a equação seja válida, o número de funções de interpolação será igual ao de

parâmetros nodais. As funções de interpolação são responsáveis por fazer com que cada nó do elemento contribua com uma parte do valor resultante em qualquer ponto dentro do elemento.

$$u = \sum_{i=1}^n N_i u_i \rightarrow \mathbf{u} = [N_1 \dots N_i \dots N_n] \begin{Bmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{u}^e \quad (3)$$

O uso de elementos finitos tem se tornado uma poderosa ferramenta que auxilia os engenheiros de diversas áreas de estudo a desenvolver produtos. Porém este método requer um grande esforço computacional para se obter uma solução precisa. Todavia a evolução continua da capacidade de processamento dos computadores possibilita que o MEF se torne cada vez mais importante e usual no desenvolvimento de produtos mais elaborados.

2.2.1 Metodologia de Análise Estrutural

O Ansys® é um dos programas mais usados na OT, porque segundo Goulart (2017), além de ser um programa de simulação integrado, nele é possível realizar diversas simulações no mesmo projeto de forma que a solução de cada análise seja compartilhada com uma outra. Por exemplo, é possível realizar uma análise térmica, modal e estática no mesmo projeto, de forma que a solução da análise térmica passa a ser a condição inicial para a análise estática, assim como os resultados da análise modal, ou seja as simulações não são independentes, os resultados são avaliados em conjunto. Além disso nele existem diferentes opções de funções de tamanho para geração da malha como, por exemplo, adaptativa, por curvatura, por proximidade, por condições de contorno, curvatura e proximidade ou uniforme. A maioria delas baseiam-se no fato de que a concentração de tensão se dá na variação de geometria, isto é, em cantos e curvaturas.

O software Ansys® tem diversos módulos de simulação, porém este trabalho usará somente os módulos *Topological Optimization* e *Static Structural*. O módulo *Static Structural* será utilizado para realizar a análise estática no domínio

inicial. Tal módulo tem algumas etapas para ser executada para se realizar a OT. Segundo Amorim (2017), as etapas são as seguintes:

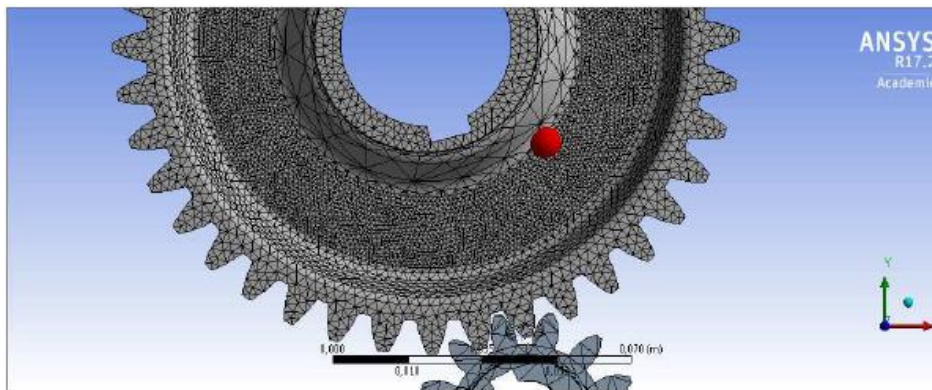
Engineering Data: Nesta etapa é feita a configuração do material que é utilizado na simulação. O Ansys já possui uma biblioteca com alguns materiais caracterizados, prontos para serem utilizados, entretanto é possível configurar sua própria biblioteca, com os materiais de interesse, e que por ventura não estejam no programa.

Geometry: A geometria de interesse deve ser selecionada, o Ansys é capaz de carregar diversos formatos de arquivo, sendo a importação de geometria compatível com a maioria dos *softwares* CAD, como o Autocad® e o Solidworks®. Mas também é possível utilizar a ferramenta *Spaceclaim*, própria do Ansys, para a modelagem 3D.

Model, Setup, Solution e Results: estas etapas são configuradas no *Ansys Mechanical*, como é a interface de maior utilização e configurações durante o processo, será melhor detalhado.

Ao abrir o *Ansys Mechanical* há na parte superior quatro barras fixas, onde se encontram as principais ferramentas de seleção (Vertices, Linhas, Planos, Volumes, Nos e Elementos) e uma quinta que se altera conforme as opções selecionadas na árvore de projeto. Na árvore de projeto, que fica à esquerda, na primeira opção *Geometry*, há um *check* verde que indica que a geometria foi carregada corretamente, e que pode-se seguir com as configurações. A próxima etapa é configurar a malha, esta etapa é muito importante para o resultado da OT. A figura 2 abaixo mostra o resultado da criação de uma malha para se fazer uma OT.

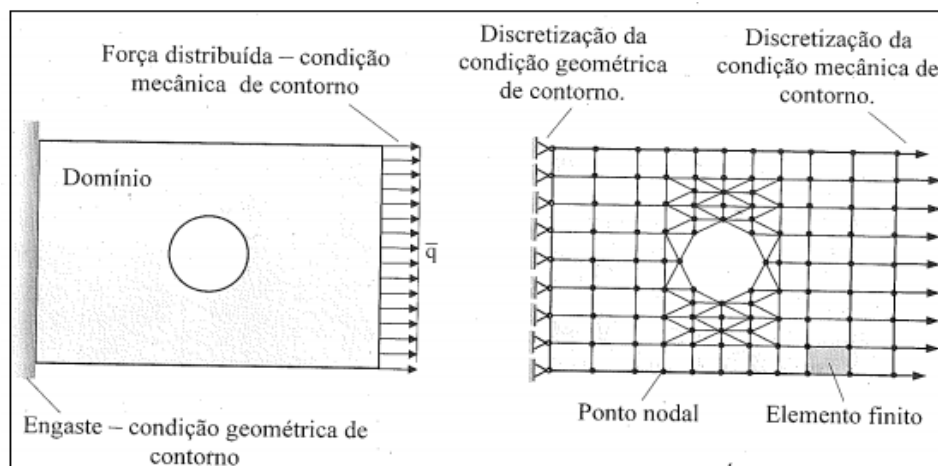
Figura 02: Malha gerada no par de engrenagens para análise de tensão e deformação



FONTE: GOULART, 2017

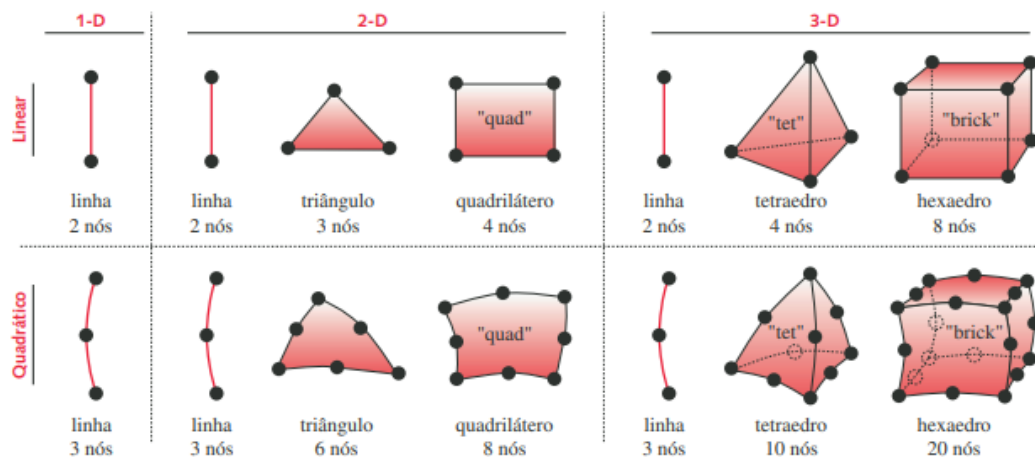
Malha de elementos finitos: Para se ter uma boa precisão nos resultados de uma análise usando o MEF, segundo Vijayaraja e Vijayaragavan (2008), deve-se usar uma malha de pontos pequena. Outra coisa que se deve levar em conta ao se decidir o tamanho da malha é a dimensão das partes críticas, local mais solicitado, da peça, que será o foco principal da análise. A solução numérica obtida num ponto específico do domínio pode convergir para valores superiores, inferiores ou sem padrão definido. Tal comportamento segundo Soriano (2009), se deve as especificidades da solução em questão e da formulação do elemento finito. Os elementos finitos segundo Norton (2013), podem ser uni, bi e tridimensional, além disso, podem ainda ser elementos de linha, área e volume, respectivamente. Eles podem ter várias formas, padrões e com números diferentes de pontos nodais em seus lados e faces. As figuras 03 e 04 abaixo mostram tipos e características locais dos elementos finitos.

Figura 03: Discretização de uma chapa tracionada.



FONTE: SORIANO, 2009

Figura 04: Formas de alguns elementos finitos

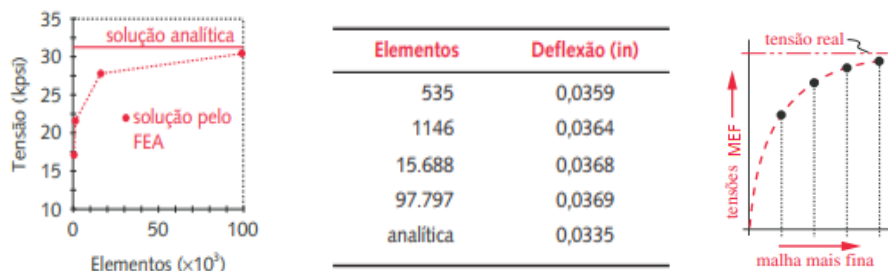


FONTE: NORTON, 2013

Para se obter um resultado confiável utilizando o MEF, deve-se prezar pela qualidade da malha gerada para descrever o objeto de estudo. Deste modo, deve-se compreender quais regiões são mais importantes no estudo e a topologia do elemento estudado para, deste modo, configurar um número de elementos, na malha, apropriado para cada região e com uma distribuição adequada.

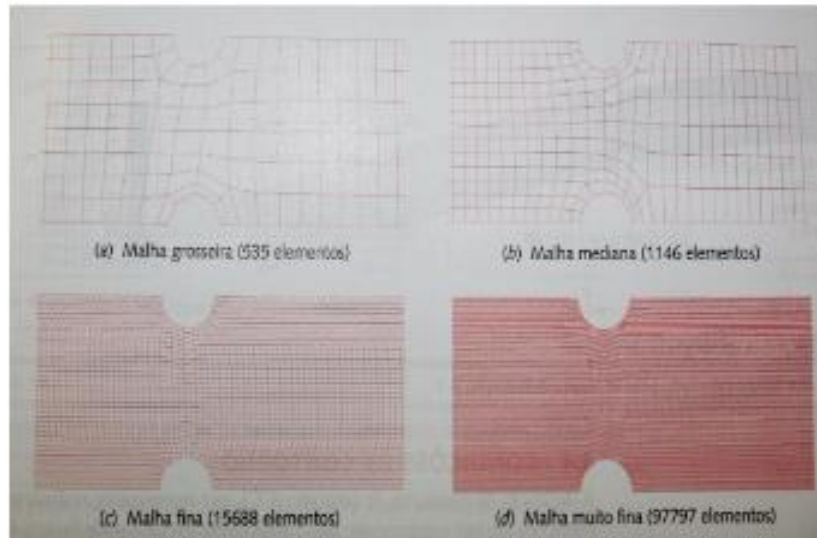
Para se obter um resultado preciso, a correta densidade da malha se faz necessário, uma vez que se a malha for muito grosseira, poucos nós, a solução não irá convergir. Caso a malha for muito pequena, muitos nós, o programa não conseguirá rodar a simulação ou poderá demorar um tempo excessivo. As figuras 05 e 06 apresentam resultados em função do número de elementos e a densidade geométrica.

Figura 05: exemplo de solução convergindo para a solução analítica



FONTE: modificado de NORTON, 2013

Figura 06: Refino de malha em uma viga



FONTE: Norton, 2013.

Os softwares de simulação segundo Norton (2013), oferecem geradores de malha por padrão, podendo ser: quadriláteros lineares ou malha mista de quadriláteros e triângulos para as regiões onde a geometria da peça tenha maior complexidade. Além disso, estes softwares também oferecem um pré-processador que permite a geração manual de malhas com elementos da escolha do usuário.

A relevância das malhas é que segundo Alves Filho (2013), as duas principais características do método dos elementos finitos são:

- A subdivisão da estrutura em elementos, isto é, a malha de elementos finitos.
- A escolha da função de interpolação, que descreve o comportamento interno do elemento, especificando as suas propriedades, e que constituem a mais importante característica do método.

O comportamento interno do elemento segundo Alves Filho (2013), é descrito pela função de interpolação. Tal função é escolhida com o objetivo de representar os deslocamentos dentro do elemento.

Outro aspecto importante para a obtenção de uma boa malha é o seu refino. Segundo Norton (2014), os programas comerciais de análise de elementos finitos, usam dois tipos de refinamento, sendo eles: h-adaptativos e p-adaptativo. O h-adaptativo, é o mais utilizado, e, em geral, a ordem do

elemento é limitada a segunda. Já o p-adaptativo permite que a ordem do polinômio interpolador dos elementos possa ser aumentada até nove ou mais, de forma a capturar as variações locais da tensão. O refinamento p-adaptativo permite que os elementos sejam maiores e em menor quantidade do que os elementos utilizados no refino h-adaptativos, para o mesmo tipo de problema. Segundo Norton (2014), O refino p-adaptativo pode se adaptar melhor aos componentes de formas complexas, devido ao uso de funções interpoladoras de alta ordem.

Embora uma malha com elementos maiores reduza o tempo de processamento e, forneça bons resultados nas regiões onde o gradiente de tensão é pequeno, nem sempre é possível optar por essa opção. O refino de malha, segundo Norton (2014), deve ser usado para aumentar o número e reduzir o tamanho dos elementos nas regiões próximas aos maiores gradientes de tensões. Nestes locais, há concentração de tensão, o que poderá ocorrer erros na simulação se a malha não estiver no tamanho adequado. Segundo Norton (2014), em tais locais, é recomendado o uso de malha mais refinada com elementos h-adaptativos ou, uma malha com a mesma densidade, porém com elementos p-adaptativos de ordem superior.

2.2.2 Otimização Topológica

Um conceito muito importante e utilizado usualmente, porém pouco explorado é a otimização. Segundo Amorim (2017), um problema de otimização de forma genérica, pode ser representado da seguinte forma:

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

Onde, A representa um conjunto de números reais. Pode-se classificar o problema em dois:

- Minimização: Busca-se um elemento x_0 pertencente à A tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x em A .
- Maximização: Busca-se um elemento x_0 pertencente à A tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo x em A .

Usualmente, $A \subset \mathbb{R}^n$, e existe um conjunto de restrições, igualdades ou desigualdades que os elementos de A devem satisfazer. O domínio A de f é chamado de espaço de busca ou conjunto de escolha, enquanto que os elementos de A são chamados de soluções candidatas ou soluções viáveis.

A função f , segundo Amorim (2017), é comumente chamada de função objetivo. Uma solução viável que minimiza/maximiza a função objetivo é chamada de solução ótima. Maximizar uma função positiva é a mesma coisa que minimizar uma função negativa. Por convenção, os problemas de otimização são tratados como problemas de minimização. Por exemplo, ao minimizar a flexibilidade, que é o oposto à rigidez (função correspondente com o sinal negativo), de uma estrutura, maximiza-se a sua rigidez.

Outros autores também corroboram com a ideia de Amorim. Segundo Simonetti et al (2022), um problema de OT pode ser definido como um problema binário cujo objetivo é a melhor distribuição do material no domínio da solução, atingindo os critérios previamente estabelecidos, maximizar/minimizar uma função objetivo predefinida. Otimização evolucionária estrutural, rejeição e admissão de elemento sequencial e otimização estrutural evolutiva suavizada são métodos de OT que buscam a topologia ideal, maximizando a rigidez da estrutura, simultaneamente removendo e/ou adicionando elementos em cada interação.

A OT, tem como objetivo maximizar a rigidez ou minimizar a compliance (flexibilidade) de uma estrutura. Segundo Andreassen et al (2011), pode ser descrito matematicamente conforme as equações 4, 5 e 6.

Minimizar:

$$c(\mathbf{x}) = \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \sum_{e=1}^n E_e(x_e) \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_0 \mathbf{u}_e \quad (4)$$

$$\frac{V(\mathbf{x})}{V_0} = f, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (5)$$

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (6)$$

Onde c é a compliance, \mathbf{K} é a matriz de rigidez global, \mathbf{U} é o vetor de deslocamento global, \mathbf{F} é o vetor global de força, \mathbf{u}_e é o vetor deslocamento dos nós do elemento, \mathbf{k}_0 é a matriz de rigidez do elemento com Módulo de Young unitário, \mathbf{x}_e é o vetor de densidades dos elementos, n é o número de elementos

usados para discretizar o domínio, $V(x)$ é o volume na última iteração, V_0 é o volume inicial referente ao domínio e f é a fração de volume prescrito.

Para estruturas contínuas, segundo Amorim (2017), a OT visa otimizar a densidade do material, que é considerada uma variável de projeto, no domínio específico. Uma outra maneira de equacionar o problema da OT, são as equações 7,8,9 e 10 abaixo:

$$\min_{\rho} C(\rho, \mathbf{u}) = \mathbf{f}^T \mathbf{u} \quad \text{s.t.: } \mathbf{K}(\rho) \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad V(\rho) = \int_{\Omega} \rho dV \leq V_s \quad (7)$$

$$E(x) = \rho(x)^p E_0 \quad (8)$$

$$0 < \rho_{\min} \leq \rho(x) \leq 1 \quad (9)$$

$$\mathbf{K}(\rho) = \sum_{e=1}^{N_{el}} \mathbf{K}_e(\rho_e) = \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}(\rho_e) \mathbf{B} d\Omega \quad (10)$$

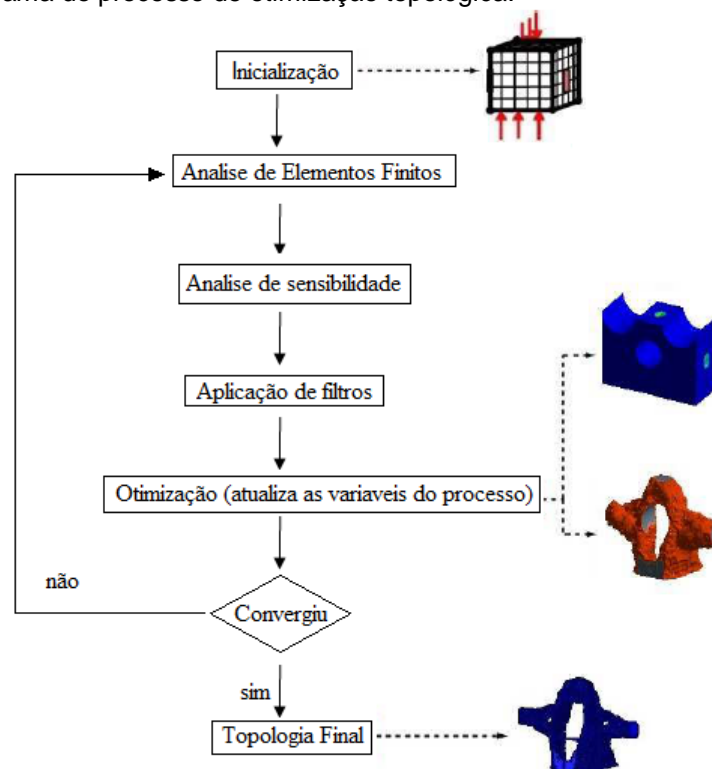
Onde ρ é o vetor densidade \mathbf{f} e \mathbf{u} são os vetores de carregamento global e deslocamento, respectivamente, \mathbf{K} e a matriz de rigidez global, e V_s e o volume predeterminado. E_0 e o modulo de Young original do material na fase solida, correspondendo a densidade $\rho = 1$, e p é o fator de penalização. A fim de evitar singularidade na matriz de rigidez um valor positivo é imposto ao limite inferior da densidade. Com o fator de penalização $p > 1$, tem-se a equação 9. Usualmente os problemas contínuos são resolvidos usando uma discretização do domínio em N elementos por meio do MEF. Usando uma abordagem de elemento, a densidade de cada elemento é representada por um valor ρ_e e a matriz de rigidez global $\mathbf{K}(\rho)$ é expressa como equação 10 e, o \mathbf{K}_e é a matriz de rigidez de um elemento de um material sólido. Além disso, deseja-se obter então uma solução que especifica ponto a ponto dentro do domínio, se a densidade é 0 (vazio) ou 1 (sólido). Em um problema com relaxação é possível ter valores de densidade entre 0 e 1 (materiais compósitos). Um dos modelos mais utilizados e o *Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP)*, no qual o modulo de Young é parametrizado pela equação 8.

Embora os dois blocos de equações 4 a 6 e, 7 a 10, sejam muito parecidas e resolvam o mesmo problema, elas o resolvem por abordagens distintas. Enquanto o primeiro bloco resolve o problema de otimização em função da

posição, o segundo bloco resolve este mesmo problema com base na distribuição do material por meio de sua densidade.

Para realizar um estudo de OT apropriado, primeiramente deve-se conhecer todos os processos necessários de maneira mais apropriada possível, isto é, garantir que todas informações e todos os processos sejam respeitados no seu teor e ordem, respectivamente. Uma vez compreendido a importância de reconhecer cada etapa no processo para se realizar a otimização de uma peça, o seguinte fluxograma é proposto:

Figura 7: Fluxograma do processo de otimização topológica.



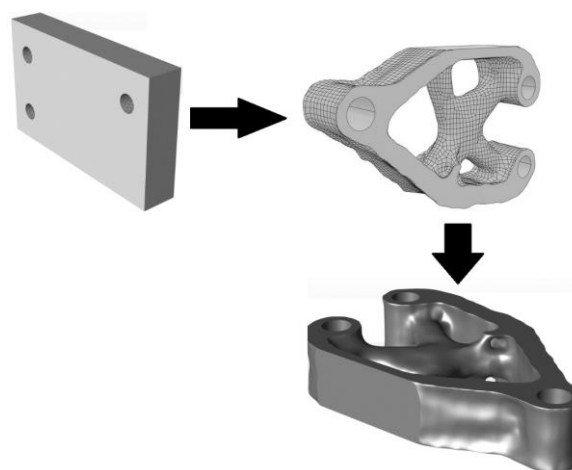
FONTE: Adaptado de AMORIM, 2017.

Este fluxograma mostra que para se resolver um problema de OT alguns passos devem ser seguidos. Inicialmente, deve-se determinar o domínio do projeto. Tal domínio consiste em uma geometria fechada de um bloco de material sólido. Após isso, definisse as condições de contorno, sendo elas: ponto de fixação, carga aplicada na estrutura, restrições na geometria de locais onde não se pode remover material. Após a definição do domínio, entra-se no loop da otimização. Amorim (2017), descreveu este loop em 5 passos, que são:

1. Análise de Elementos Finitos: nesta etapa resolve-se a equação 7, por meio de um *solver linear*, para obtenção dos deslocamentos nodais.
2. Análise de Sensibilidade: nesta etapa são avaliadas as derivadas da função objetivo bem como das restrições.
3. Aplicação de Filtros: esta etapa pode ser omitida, contudo é aconselhável aplicar filtros para eliminar efeitos de instabilidade recorrentes da otimização topológica conhecidos como *checkerboard* ou tabuleiro de xadrez.
4. Otimização: esta é a principal etapa do processo de otimização topológica, no qual as variáveis de projeto (densidades) são modificadas.
5. Convergência: etapa final, onde é decidido se o resultado obtido convergiu para uma solução, caso contrário, volta-se a primeira etapa, e novamente executa-se o *loop* alterando alguma configuração até que se obtenha o resultado desejado.

Uma vez que o resultado tenha convergido, obtemos a topologia final. A figura 7 ilustra como este loop é construído. Partindo de um volume arbitrário com condições de contorno definida, passando pelas etapas de modelagem matemática de uma malha até chegar numa geometria otimizada.

Figura 8: Etapas da otimização topológica.



FONTE: adaptado PLM Technology 2019.

Antes de prosseguir com o trabalho deve-se fazer um adendo para explicar o que é *Checkerboard*, Mínimos Locais e Dependência de Malha. Além disso, mostrar a importância no processo de otimização

Segundo Goulart (2017), os problemas relacionados ao *checkerboard* são de extrema importância porque eles também são um parâmetro para definir a qualidade do resultado da OT. Nestes problemas há uma formação de alternância de elementos vazios e elementos cheios. A instabilidade é indesejável na solução de problemas, pois não se configura numa ótima distribuição de material e sim num fenômeno que aparece devido à formulação do elemento finito utilizado no processo de otimização.

Os problemas de mínimos locais segundo Bahia (2005), diz respeito a diferentes soluções obtidas para o mesmo problema discretizado quando se escolhem diferentes parâmetros do algoritmo, tais como: valores iniciais de densidade e fatores de penalidade.

Em uma OT, segundo Bahia (2005) é comum que elas sejam não convexas*, levando a existência de muitos mínimos locais e diferentes soluções para o mesmo problema. Tal fato ocorre devido a utilização de diferentes estimativas iniciais para as variáveis e diferentes parâmetros dos algoritmos de otimização. Segundo Bahia (2005) a ocorrência disto deve-se as provas de convergência dos algoritmos funcionam para a programação convexa**, enquanto para programação não convexa garante-se a convergência para pontos estacionários que não são necessariamente mínimos globais.

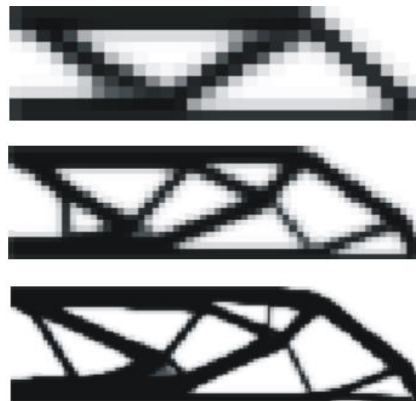
* Um conjunto convexo S segundo Bahia (2005), é uma coleção de pontos x tendo a seguinte propriedade: se P_1 e P_2 são quaisquer pontos $\in S$, estão o segmento de linha $P_1 - P_2$ está inteiramente em S . Esta afirmação, pode ser descrita pela equação abaixo:

$$x = \alpha x_2 + (1 - \alpha) x_1, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

** A existência de um problema de programação convexa segundo Bahia (2005), só é possível se todas as funções de desigualdade para um problema de projeto ótimo são convexas e todas as restrições de igualdade são lineares. Por consequência disto, a função objetivo também será convexa no domínio.

A dependência de malha, segundo Bahia (2005) se deve ao fato de que o refino da malha impacta no resultado da solução. Com isso há variações nas topologias obtidas com malhas com refinamentos diferentes. Quanto mais refinada for a malha, maior a resolução dos contornos entre as faces e complexidade da topologia, onde a mesma terá mais furos e mais detalhes. A vantagem da estrutura ter mais furos, sem alterar o volume da estrutura, é o aumento da eficiência estrutural pelo fato das variações estruturais tenderem a formar microestruturas que apresentam melhor aproveitamento de material. A figura 9 exemplifica isso.

Figura 9: exemplo de dependência de malha



FONTE: Bahia, 2005

A OT é um método confiável e difundido na indústria, porém, ele ainda apresenta alguns problemas relacionados a instabilidade numérica. Segundo Araújo (2018), frequentemente, alguns problemas aparecem devido à modificação do problema geral de OT por meio da relaxação e penalização das variáveis de projeto. Além disso, outro problema surge devido a discretização do domínio de referência pelo MEF. Os principais fatores que pioram a qualidade dos resultados ótimos são: regiões acinzentadas, padrão do tabuleiro de xadrez - *checkerboard*, dependência de malha, fronteira irregular, mínimos locais e cálculos onerosos.

O presente trabalho não irá definir todos esses problemas que pioram a qualidade dos resultados ótimos de uma OT. Devido a sua grande relevância e ocorrência, o foco deste trabalho será na instabilidade numérica de tabuleiro de xadrez ou *checkerboard*.

Embora já definida por outro autor, o *checkerboard* pode ter seu significado expandido e entendido, segundo Araújo (2018), como um padrão periódico de

valores altos e baixos de densidades artificiais, formando uma região em que esses elementos se dispõem como num tabuleiro de xadrez. A figura 10 mostra uma viga, que foi observado regiões na mesma que apresenta este padrão na solução ótima de problemas de minimização da função de flexibilidade da estrutura. Segundo Araújo (2018), este é um tipo de instabilidade indesejável no resultado final e não corresponde a uma distribuição ótima do material no domínio da estrutura. As estruturas em que se observa o padrão de tabuleiro de xadrez possui uma rigidez artificial e a sua configuração é muito difícil de ser manufaturada.

Figura 10: exemplo de resultado ótimo com a instabilidade numérica do padrão de tabuleiro de xadrez.

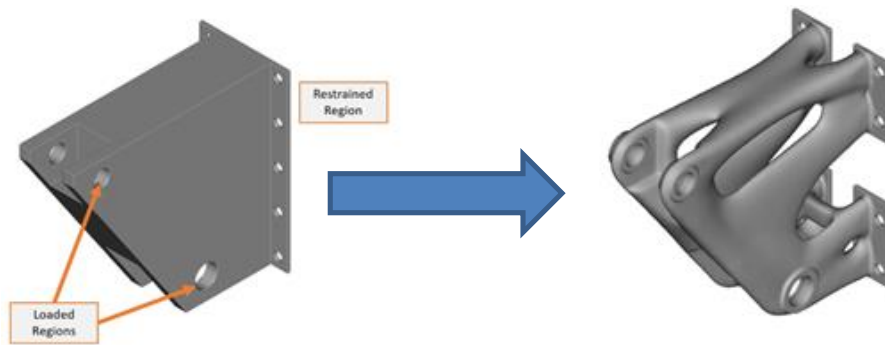


FONTE: ARAÚJO, 2018.

A distribuição do material, que segundo Goulart (2017), é modificado levando em consideração alterações em algum comportamento mecânico da estrutura, tal como flexibilidade, frequências naturais ou tensão, entre outros. Por este motivo, o resultado da análise de tensão e deformação é necessário para qualquer programa que se proponha a realizar a OT de uma determinada região. O problema é como distribuir o material no interior de um domínio fixo estendido sob determinada condição de contorno, de modo a minimizar a função objetivo e atendendo as restrições.

Os métodos de OT segundo Lanes (2013), surgiram para suprir a necessidade da identificação do posicionamento mais adequado para os constituintes estruturais. Logo é possível concluir que a OT pode ser entendida com base no próprio significado da palavra “topologia”, que vêm do grego: “topos” (lugar) e “logos” (estudo).

Figura 11: Otimização topológica de um suporte hipotético.



FONTE: adaptado de Laughlin, TREVOR, 2019.

Segundo Silva (2018), esta técnica não se limita apenas à otimização do projeto mecânico da peça em si, mas se estende para toda a cadeia produtiva da empresa, uma vez que peças com menor peso ou volume, economiza material usado, possibilitando aumentar a produção, por causa de seu menor peso/volume seu transporte se torna mais fácil, portanto permite reduzir o custo total final da peça.

3. MATERIAIS E MÉTODOS

3.1 Características e aplicações do Componente

O uso de CAE's já é largamente usado na indústria a muitos anos. A determinação de topologias estruturais adequadas se utiliza de recursos tecnológicos capazes de proporcionar layouts eficientes. Programas de análise estruturais como o Ansys, de modelagem 3D como o NX Unigraphics e de compilação de algoritmos como o Matlab, são amplamente usados, dentre outras ferramentas computacionais. O presente trabalho usará os dois primeiros programas para realizar o projeto de otimização. Estes programas permitem inovação em todos os diversos setores, desde engenharias até à área da saúde.

Para dar início ao projeto propriamente dito, inicialmente determinou-se os parâmetros da engrenagem. A escolha foi uma engrenagem cilíndrica de dentes retos. A engrenagem idealizada pelo autor deste trabalho. As fórmulas para se obter os valores dos parâmetros da tabela abaixo, foram obtidos de Provenza (1991) e Melconian (2014).

Tabela 1: Parâmetros engrenagem de dentes retos

DIMENSÕES DA ENGRENAGEM			
Parâmetro	Símbolo	Valor	Fórmula para se obter
Número de dentes	z	32,00	-
diâmetro primitivo (mm)	D_o	128,00	-
Largura da engrenagem (mm)	L	40,00	-
Diâmetro furo do eixo (mm)	-	30,00	-
Ângulo de pressão ($^{\circ}$)	α	20,00	-
Módulo (mm)	m	4,00	$m=D_o/z$
Diâmetro externo (mm)	D_k	136,00	$D_k=D_o+2h_k$
Diâmetro interno (mm)	D_f	110,40	$D_f=D_o-2h_f$
Diâmetro de base (mm)	D_g	120,28	$D_g=D_o*\cos(\alpha)$
Passo (mm)	t_o	12,57	$t_o=m*\pi$
Altura do dente (mm)	h	8,66	$h=2,166*m$
Altura da cabeça do dente (mm)	h_k	4,00	$h_k=m$
Altura total do dente (mm)	h_f	8,80	$h_f=2,2m$
Ângulo do dente ($^{\circ}$)	β	2,81	$\beta=90^{\circ}/z$
coeficiente f (Odontografo de Grant)	f	4,20	-
coeficiente f' (Odontografo de Grant)	f'	2,93	-
raio do dente (mm)	r	16,80	$r=f*m$
raio 1 do dente (mm)	r_1	11,72	$r_1=f'*m$

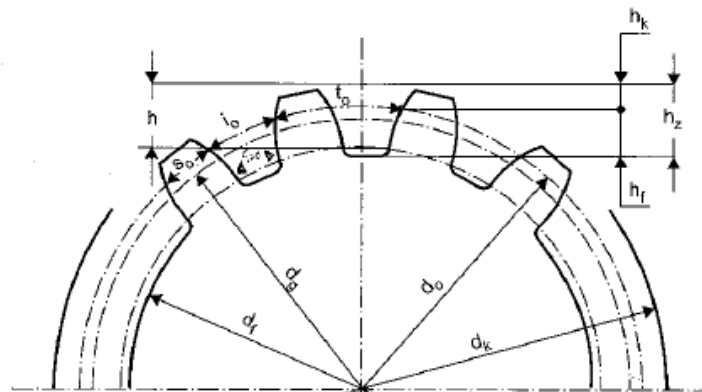
raio 2 do dente (mm)	r2	8,40	$r2=2,1*m$
raio 3 do dente (mm)	r3	0,67	$r3=m/6$
espessura da corda (mm)	sc	6,28	$sc=m*z*\text{sen}(\beta)$

FONTE: Próprio autor

Os valores da tabela 1, mostram uma engrenagem de dentes retos idealizada.

Os parâmetros da mesma podem ser vistos na figura abaixo:

Figura 12: Parâmetros engrenagem de dentes retos



FONTE: MELCONIAN, 2014.

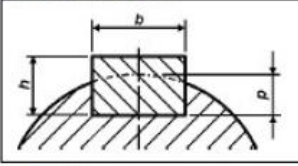
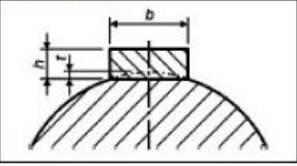
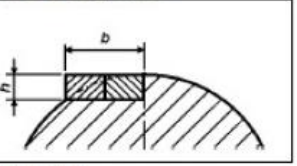
Para finalizar o desenho da engrenagem, o autor propoem que ela tenha um rasgo de chaveta. Após analisar a Norma DIN 6885 (2011), chegou-se a seguinte dimensões para a chaveta:

Tabela 2: Parâmetros do rasgo de chaveta

DIMENSÕES RASGO DE CHAVETA		
Largura (mm)	b	10,00
Altura (mm)	h	8,00
Profundidade do rasgo (mm)	-	Passante

FONTE: Próprio autor

Figura 13: Parâmetros para rasgo de chavetas.

CHAVETAS									
Dimensões de chavetas em função do diâmetro do eixo									
Chaveta encastrada			Chaveta plana				Chaveta tangencial		
									
Figura 65			Figura 66				Figura 67		
Ø do eixo	Chaveta encastrada			Chaveta plana			Chaveta tangencial		
	b	h	p	b	h	t	Ø do eixo	b	h
10 - 12	4	4	2,5	-	-	-	100	30	10
12 - 17	5	5	3,0	-	-	-	110	33	11
17 - 22	6	6	3,5	-	-	-	120	36	12
22 - 30	8	7	4,0	8	4	1	130	39	13
30 - 38	10	8	4,5	10	5	1,5	140	42	14
38 - 44	12	8	4,5	12	5	1,5	150	45	15
44 - 50	14	9	5	14	5	1	160	48	16
50 - 58	16	10	5	16	6	1	170	51	17
58 - 68	18	11	6	18	7	2	180	54	18
68 - 78	20	12	6	20	8	2	190	57	19
78 - 92	24	14	7	24	9	2	200	60	20
92 - 110	28	16	8	28	10	2	210	63	21
110 - 130	32	18	9	32	11	2	220	66	22
130 - 150	36	20	10	36	13	3	230	69	23
Observação: As medidas são em milímetros.									

FONTE: Modificado de USP, 2013.

A engrenagem usada no trabalho é de aço 1045. Tal escolha se deu devido as suas propriedades e ao fato de ser um material de grande aplicação industrial. Olhando o Data sheet do material, temos que as suas propriedades são:

Tabela 3: Composição química do aço 1045

Elemento	Porcentagem (%)
Ferro, Fe	98,51 - 98,98
Carbono, C	0,45
Manganês, Mn	0,60 – 0,90
Fosforo, P (max)	0,04
Enxofre, S (max)	0,05

FONTE: Modificado de Azo Materials, 2013

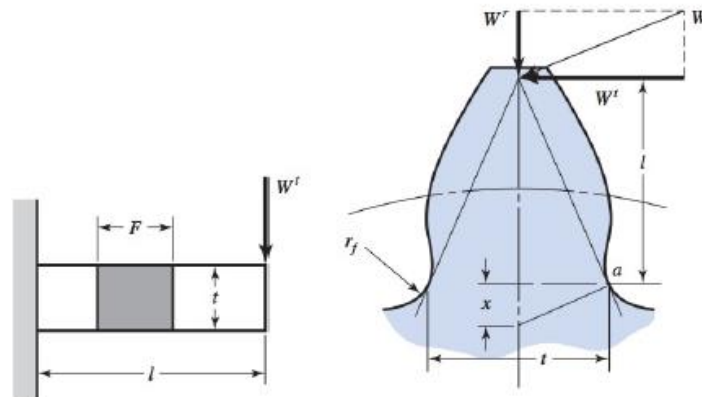
Tabela 4: Propriedades do aço 1045

Propriedades	Valores
Limite de Resistência à Tração	585 MPa
Limite de Escoamento	450 MPa
Módulo elasticidade	200 GPa
Tensão de cisalhamento	80 GPa
Coeficiente de Poisson	0.29
Alongamento base de medida de 50 mm	16%
Dureza Brinell	163
Dureza Rockwell B	84
Dureza Vickers	170
Densidade	7,87 g/cm ³

FONTE: Modificado de Azo Materials, 2013

Para dar início ao processo de otimização, é necessário fazer algumas considerações e, segundo Budynas & Nisbett (2016) dimensionar os esforços que a engrenagem será submetida, aplicando a equação de flexão de Lewis. Na equação de Lewis, o dente da engrenagem pode ser aproximado a uma viga engastada, como pode ser visto na figura 14.

Figura 14: Aproximação do dente de engrenagem com uma viga engastada



FONTE: Budynas & Nisbett, 2016

Na figura 14, as letras representam: t é a largura do dente, l é a distância da início do dente até o centro da engrenagem, F é a espessura do dente e W^t é a força tangencial. Os valores da geometria do dente podem ser encontrados facilmente observando a engrenagem. Já a força tangencial precisa ser calculada, usando a equação de Lewis, equação 11, a seguir.

$$\sigma = \frac{6 * W^t * l}{F t^2} \quad (11)$$

$$\sigma = \frac{\sigma_c}{FS} \quad (12)$$

$$M = W^t * l \quad (13)$$

Onde:

σ = tensão admissível; σ_c = tensão de cisalhamento; FS = fator de segurança e M = é o momento de força.

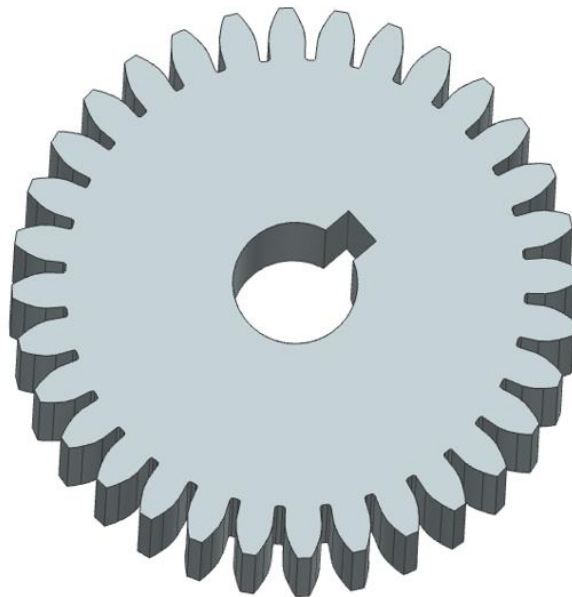
3.2 Pré Processamento

Inicialmente foi-se modelado a engrenagem no NX Unigraphics®. A partir deste ponto, o modelo foi exportado para o Ansys®, onde inicialmente foi gerado a malha de elementos finitos e, estudado do melhor elemento e tamanho da malha a ser usado no projeto.

A figura 15, mostra a modelagem da engrenagem antes da otimização. A figura 16 mostra a engrenagem com a malha gerada no Ansys, com o refino adequado da malha.

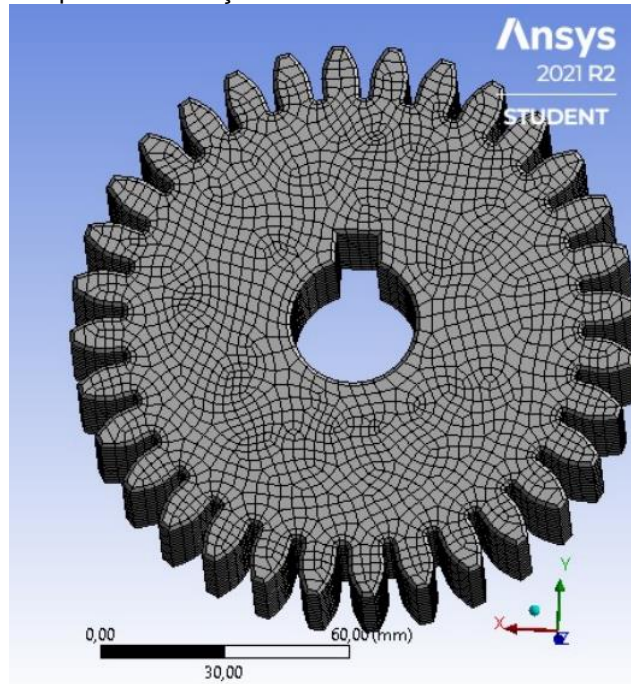
Todos os detalhamentos da engrenagem antes e depois da otimização encontra-se no apêndice deste trabalho.

Figura 15: Engrenagem antes da otimização.



FONTE: Próprio autor, utilizando software NX Unigraphics.

Figura 16: Malha gerada para a realização da OT



FONTE: Próprio autor, utilizando software Ansys

A malha gerada possui 125185 nós e 27045 elementos, onde cada elemento mede 3 mm. Esta malha foi gerada utilizando elementos tetraédricos, de ordem quadrática, obtendo uma média de 83,21% de precisão nos elementos. Esta precisão significa que 83,21% dos elementos gerados por esta malha são elementos tetraédricos, o restante são elementos triangulares.

A tabela 5 mostra o resultado dos esforços ao qual o dente da engrenagem será submetido usando a equação de Lewis.

Tabela 5: Parâmetros de esforços na engrenagem

Parâmetro	Símbolo	Valor
Tensão admissível	σ	292,5 MPa
Força tangencial	W^t	11,685 KN
Tensão de cisalhamento	σ_c	585 MPa
Fator de segurança	FS	2
Momento de força	M	794,580 KN.mm
Comprimento da cabeça do dente até o centro da engrenagem	l	68 mm
Espessura do dente	F	40 mm
Largura do dente	t	8,4 mm

FONTE: Próprio autor

Após isso, foi executado uma análise estática da peça e posterior OT. A solução da otimização foi uma peça com superfície irregular. Neste ponto, será modelada no NX Unigraphics® a mesma peça, obedecendo as dimensões proposta pelo Ansys.

3.3 Solução e Pós Processamento

A partir deste ponto, o projeto passara pelo processo de validação. A peça modelada no NX, será analisada no Ansys novamente para ser otimizada novamente. Caso o resultado obtido nessa etapa for próximo ao obtido inicialmente, a otimização estará concluída. Caso isso não ocorra, retorna à etapa de modelar a peça no NX e posteriormente analisa-la no Ansys. Tal procedimento será repetido até a obtenção de resultado aproximado.

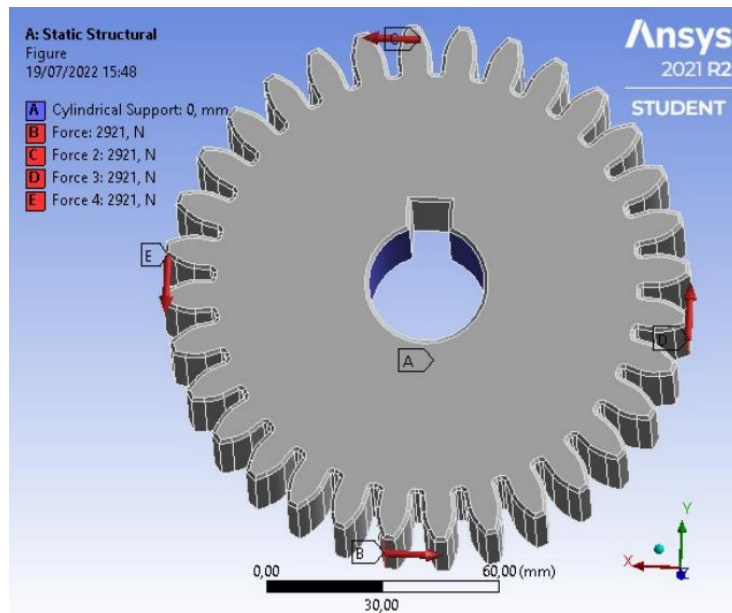
3.4 Resultados e Discussões

Para uma melhor distribuição dos esforços na engrenagem, foi considerado que a engrenagem em questão é a engrenagem motora, tendo como solicitação o momento calculado na tabela 5.

Engrenagem motora, segundo Melconian (2014), é a engrenagem ligada a fonte de energia. Logo ela estará ligada ao eixo principal e será responsável por mover as demais engrenagens do trem.

A força encontrada para o dente da engrenagem foi imputada no software, dividindo o seu valor por 4 e colocando este esforço em 4 dentes. Tal escolha se deu para que o esforço no interior da engrenagem seja dividido igualmente em toda a geometria da peça. A figura 17 mostra como os esforços foram imputados no Ansys. Uma vez que se trata de uma análise estática todos os dentes foram travados para que o esforço fosse distribuído igualmente por toda a estrutura.

Figura 17: Entrada dos dados no software antes da OT

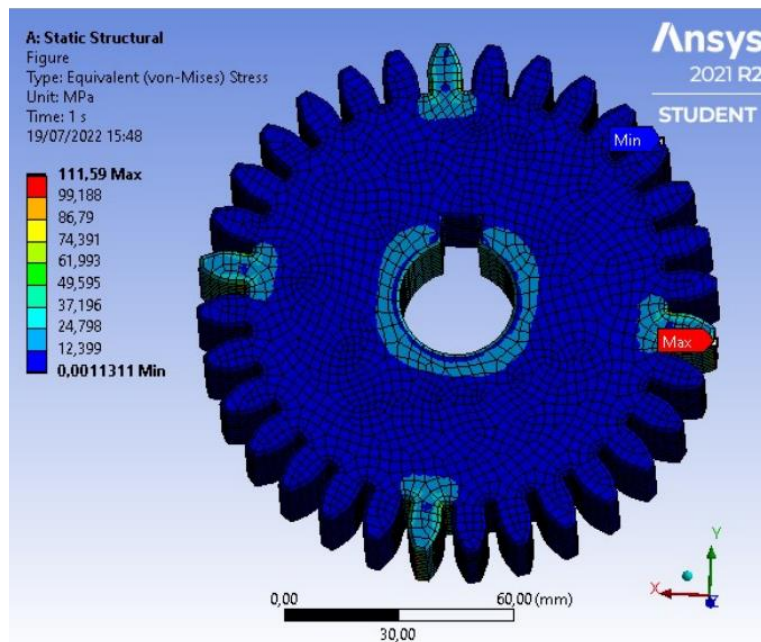


FONTE: Próprio autor, utilizando software Ansys

Antes da otimização, a engrenagem tinha um volume de $2,5192 \times 10^{-3} \text{ mm}^3$ e 3,7410 kg. A tensão máxima encontrada na engrenagem foi de 111,59 MPa.

A figura 18, mostra a distribuição da tensão ao longo da engrenagem. Ao se analisar esta figura, pode-se perceber que a tensão máxima encontrada está nos dentes da engrenagem onde foi aplicada a força. Tal tensão encontra-se nos dentes da engrenagem onde foi aplicado a força, diminuindo a medida que se afasta da cabeça do dente, voltando a aumentar próximo ao centro da engrenagem. Com isso fica evidenciado que parte da estrutura não está sendo solicitada e, conseqüentemente poderá ser removida sem prejuízos para a estrutura.

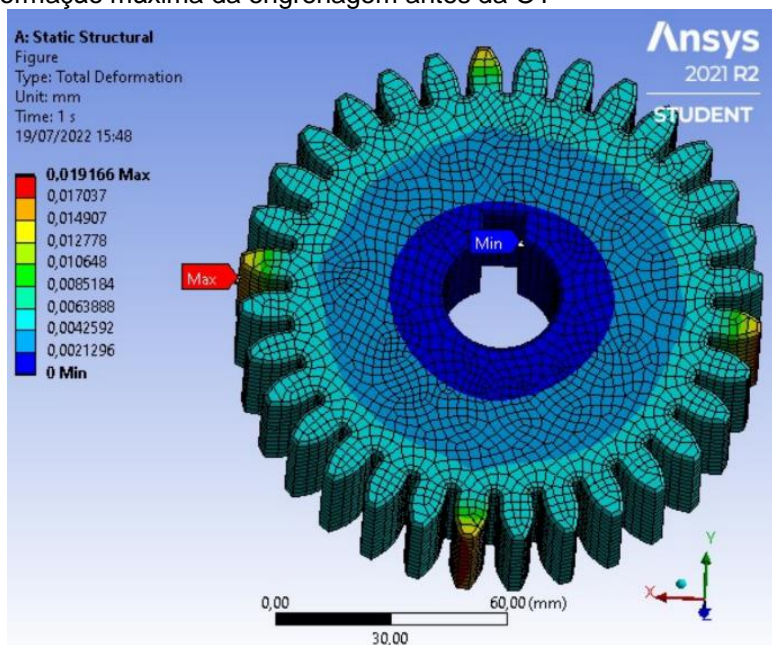
Figura 18: Resultado tensão de Von Mises na engrenagem antes da OT



FONTE: Próprio autor, utilizando software Ansys

A figura 19 mostra o efeito dos esforços no deslocamento do material que compoem a engrenagem. O deslocamento máximo foi de $1,9166 \cdot 10^{-2}$ mm. A explicação da deformação máxima estar nos dentes da engrenagem onde foi aplicado a força se deve ao fato de ser a região mais solicitada. De forma semelhante à figura 18.

Figura 19: Deformação máxima da engrenagem antes da OT



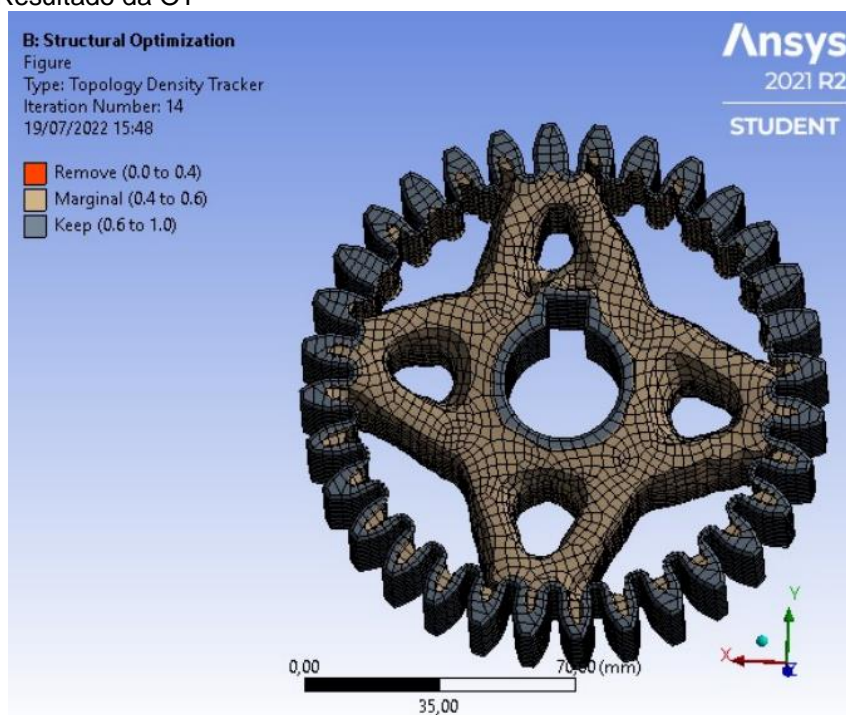
FONTE: Próprio autor, utilizando software Ansys

O fator de segurança pode ser calculado através da equação 12, chegando a um fator de 2,62. Após a realização da análise estática e dos valores de tensão máxima e do fator de segurança, fica evidenciado que a engrenagem está superdimensionada. Logo pode-se remover material da engrenagem sem que a estrutura fique fragilizada.

O resultado da otimização é uma peça mais leve comparada a peça original, pesando 2,3083 kg. Tal redução representa uma diminuição de 37,991% da massa da engrenagem original.

A figura 20 mostra o resultado da otimização topológica, todavia devido o software retorna como solução uma estrutura com geometria complexa, tornando a sua fabricação impraticável. Logo, a geometria precisa ser retrabalhada a fim de se obter uma peça manufaturável.

Figura 20: Resultado da OT

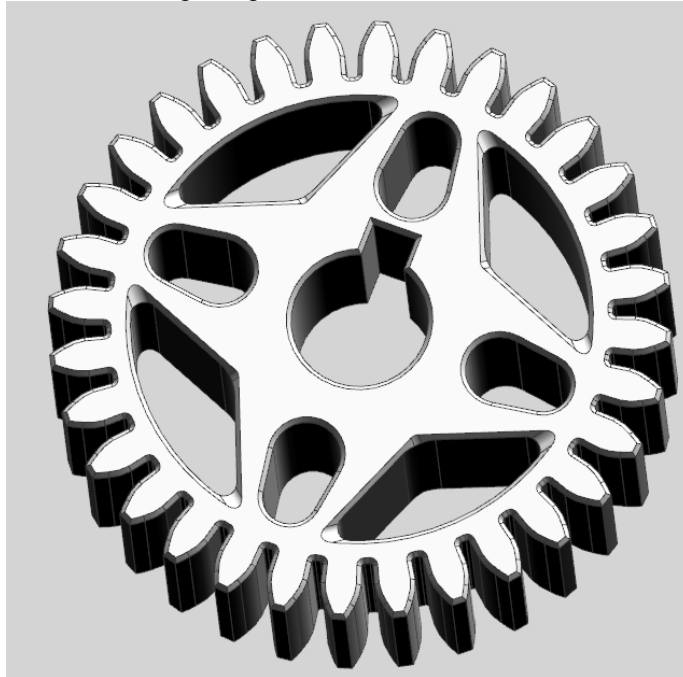


FONTE: Próprio autor, utilizando software Ansys

Com base no resultado obtido da OT, o modelo foi exportado para o NX, a fim de se obter um novo modelo 3D. Algumas considerações foram feitas para tal. Com a finalidade de se evitar pontos de concentração de tensão, foram eliminadas as quinas vivas da engrenagem, fazendo chanfros na face frontal e na face do fundo e, fazendo raios nas quinas formadas pelas regiões onde foram

removida material. A figura 21 mostra a nova engrenagem que foi feita com base o resultado da Otimização topológica.

Figura 21: Modelo 3D da nova engrenagem



FONTE: Próprio autor, utilizando software NX Unigraphics

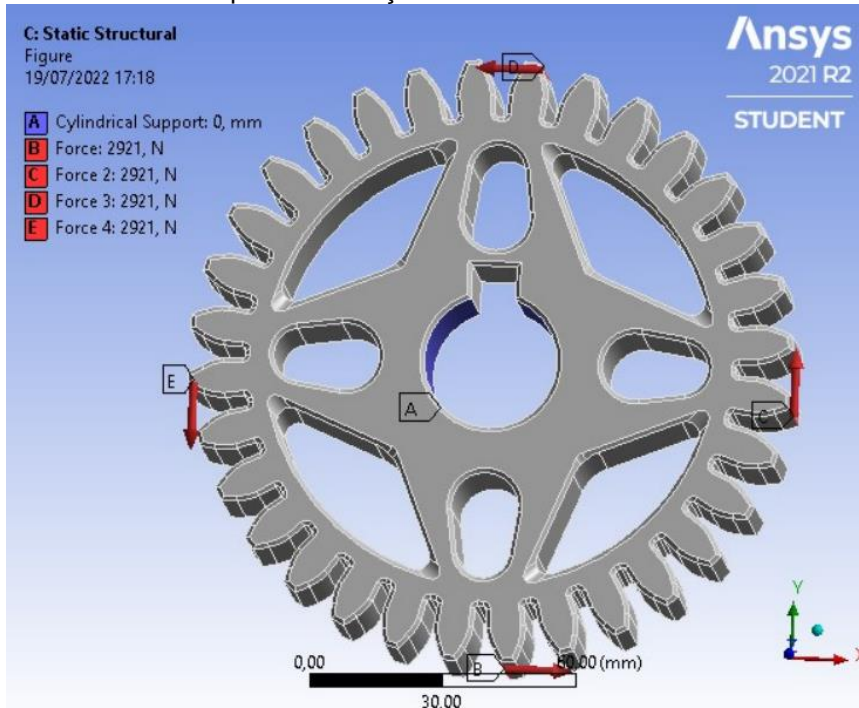
A nova engrenagem modelada, que pode ser vista na figura 21, tem massa de 2,5916 kg e $3,3014 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$.

Após a conclusão da otimização topológica e de um novo modelamento 3D da engrenagem, passou-se para a etapa de validação dos resultados. Assim, com o objetivo de verificar se a engrenagem resiste aos esforços fez-se uma nova análise estática.

Ambas as simulações foram imputadas os mesmos valores. A figura 23 mostra a malha gerada, nesta malha, foi utilizado elementos tetraédricos medindo 3 mm de ordem quadrática. Ao todo, foram usados 86467 nós e 16215 elementos, dando uma precisão de 83,59%.

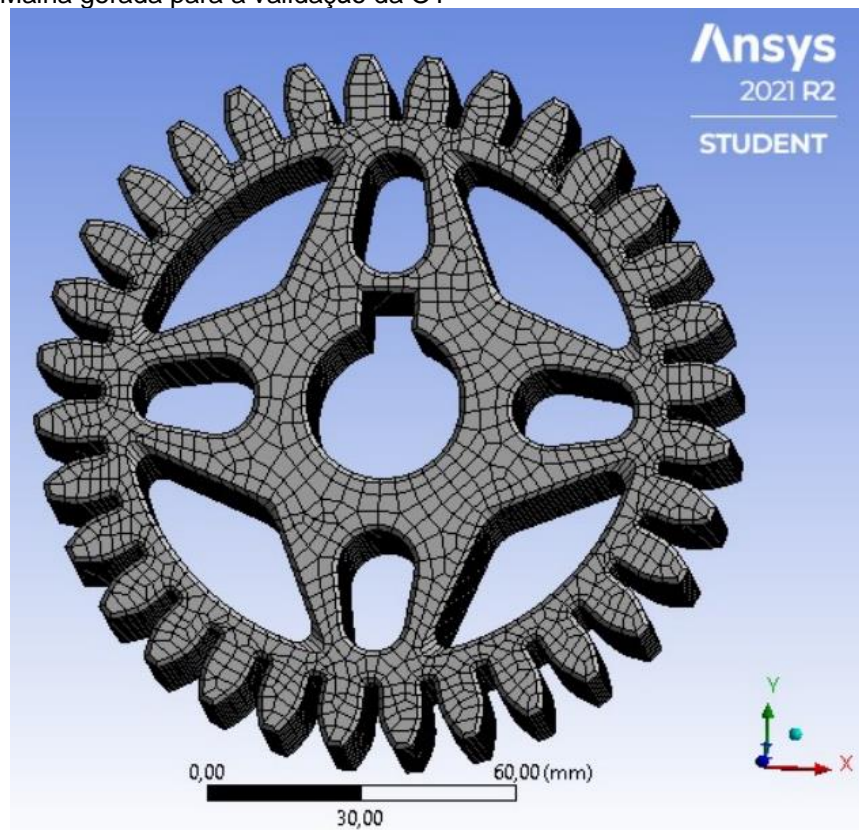
As figuras 24 e 25 mostram os resultados da análise estática. Nesta análise, tem-se como resposta uma tensão de Von Misses máxima de 130,8 MPa, deformação máxima de $2,7196 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$. O fator de segurança foi calculado novamente, obtendo como resultado 2,24.

Figura 22: Entrada dos dados para a validação da OT



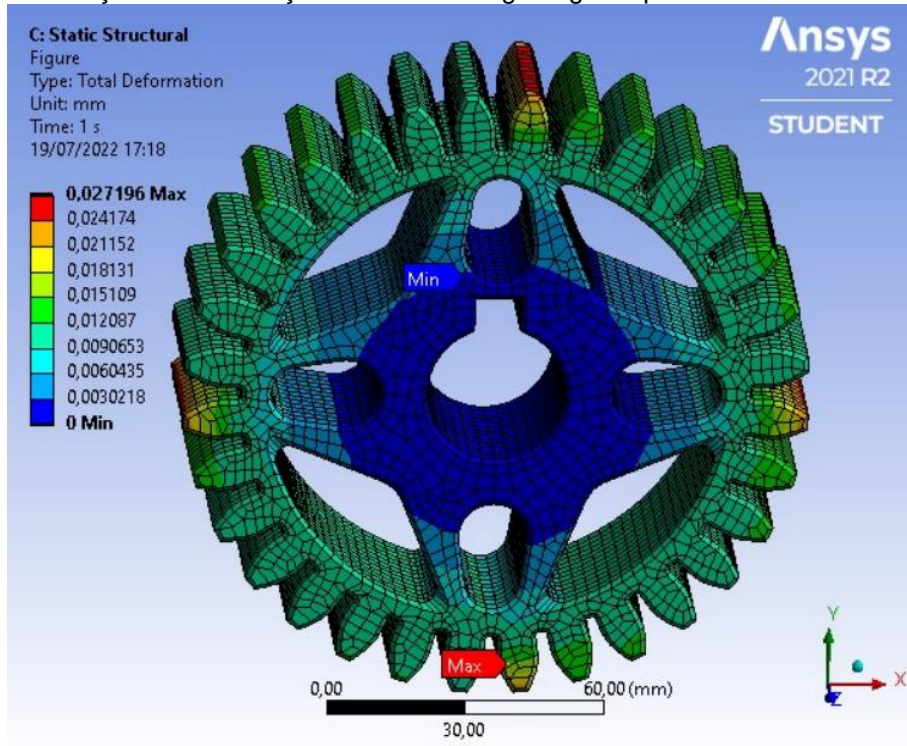
FONTE: Próprio autor, utilizando software Ansys

Figura 23: Malha gerada para a validação da OT



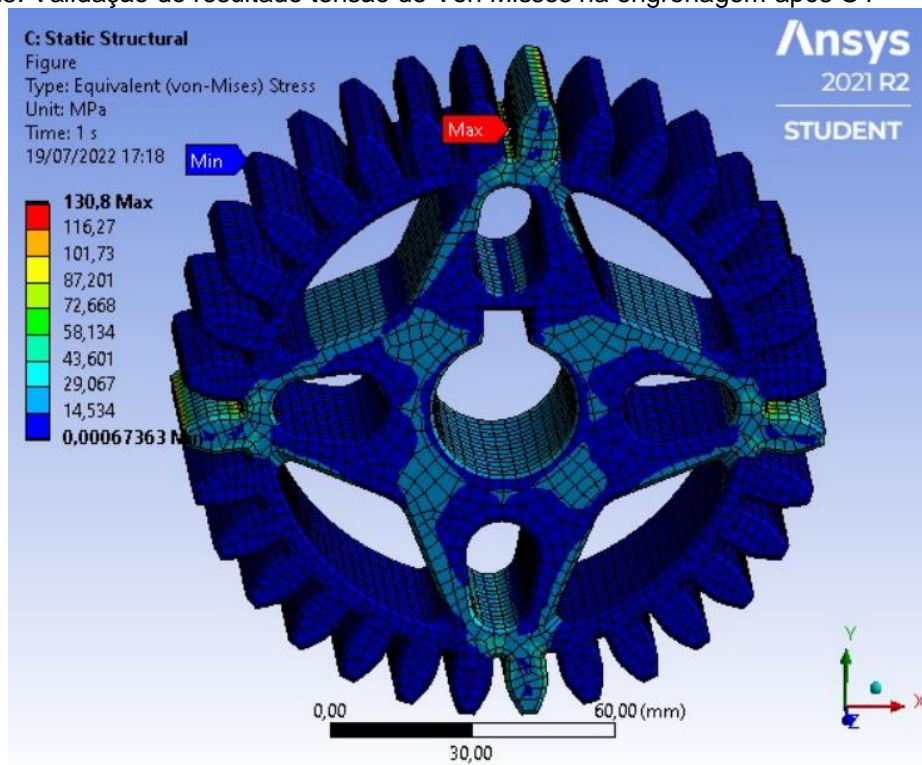
FONTE: Próprio autor, utilizando software Ansys

Figura 24: Validação da deformação máxima da engrenagem após OT



FONTE: Próprio autor, utilizando software Ansys

Figura 25: Validação do resultado tensão de Von Mises na engrenagem após OT



FONTE: Próprio autor, utilizando software Ansys

Após a realização da validação dos resultados, pode-se construir a tabela 6, para condensar os resultados obtidos no trabalho e se ter uma visão global do que foi feito.

Tabela 6: Comparação dos resultados da otimização

Parâmetros	Antes da Otimização	Depois da otimização	Redução
Massa (kg)	3,7410	2,5916	30,724%
Volume (mm ³)	4,7535x10 ⁵	3,3014*10 ⁵	30,548%
Tensão máxima (MPa)	111,59	130,8	-
Deslocamento máximo (mm)	1,9166*10 ⁻²	2,7196*10 ⁻²	-
Fator de segurança	2,62	2,24	-

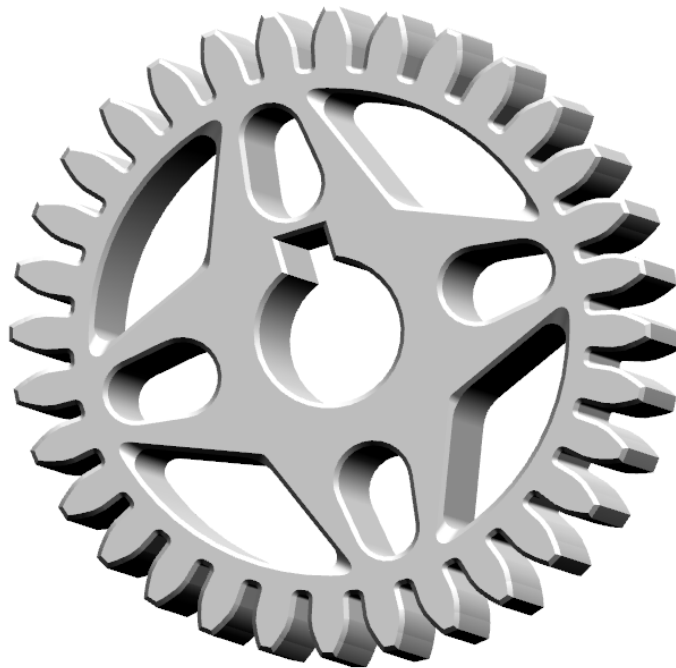
FONTE: Próprio autor

A partir da tabela 6 podemos chegar à conclusão que a houve uma grande redução de massa na engrenagem. Logo a nova engrenagem será mais economicamente viável de se produzir. Além disso, há o ganho desta engrenagem tornar todo o sistema ao que ela está ligada mais leve.

No quesito fator de segurança, o fator de segurança da peça otimizada é maior comparada a engrenagem idealizada, 2,24 e 2 respectivamente, isso evidencia que a engrenagem ainda está superdimensionada, conseqüentemente poderá ser usada com esforços superior ao que foi projetada. Além disso, a tensão máxima (130,8 MPa) está muito abaixo do limite de escoamento do material (450 MPa), sendo que a tensão máxima é aproximadamente 29,07% do limite de escoamento. Logo a engrenagem está muito longe de sofrer deformação plástica.

Com relação aos deslocamentos máximos, devido a eles serem muito pequenos, não trarão qualquer prejuízo a engrenagem. Por fim, a figura 26 mostra a versão final da engrenagem proposta por este trabalho.

Figura 26 - Versão final da engrenagem



FONTE: Próprio autor, utilizando software NX Unigraphics

4. CONCLUSÃO

Neste trabalho, pode-se concluir que o método de otimização topológica é um método que melhora a geometria de peças, tornando-as mais leves e eficientes. O método se configura como uma ferramenta estratégica para o desenvolvimento de geometrias enxutas e funcionais, com resultados econômicos expressivos, no campo da fabricação e operação, devido às reduções de peso e consumo energético.

A peça otimizada poderá suportar os mesmos esforços que a original, com o benefício de ser uma peça mais leve e mais economicamente viável, uma vez que é necessário menos material para produção da mesma. A peça otimizada mostrou-se 30,724% mais leve do que a peça original.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, Maria Cascão Ferreira de. *Estruturas isostáticas*. 2009. São Paulo. Editora: Oficina de textos.

ALVES FILHO, Avelino. *Elementos finitos: A base da tecnologia CAE*. 2013. 6ª edição. Editora Saraiva.

AMORIM, Bruno Salles Marquet. *Otimização topológica aplicada a implantes craniofaciais*. 2017. PUC- Rio de Janeiro. Disponível em: <https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/33934/33934.PDF>. Acesso: 10 nov. de 2019.

Andreassen, E., Clausen, A., Schemenels, M., Lazarov, B. S., Sigmund, O. *Efficient topology optimization in matlab using 88 lines of code*. 2011. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/226050138_Efficient_topology_optimization_in_MATLAB_using_88_lines_of_code. Acesso: 8 de out. de 2019.

ARAUJO, Marcelo Vitor Oliveira. *Teoria de volumes finitos aplicada à otimização topológica de estruturas elásticas contínuas*. 2018. Maceió – AL. UFAL. Dissertação de mestrado em engenharia civil. Disponível em: <http://www.repositorio.ufal.br/handle/riufal/3600>. Acesso: 10 nov. de 2019.

AZEVEDO, Álvaro F. M. *Método dos elementos finitos*. 2003. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. 1ª Edição.

AZO MATERIALS. *Data sheet AISI 1045 Carbon Steel (UNS G10450)*. 2013. Disponível em: <https://www.azom.com/article.aspx?ArticleID=9153>. Acesso: 10 maio de 2022.

BAHIA, Miguel Tobias. *Otimização topológica aplicada ao projeto de mecanismos flexíveis*. 2005. Florianópolis – SC. UFSC. Dissertação de mestrado em engenharia mecânica. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/102156/224359.pdf?sequence=1>. acesso: 5 ago. de 2022.

BENDSØE, Martin Philip; KIKUCHI, Noboru. *Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method*. 1988. Computer methods in applied mechanics and engineering 71 (1988) 197-224 north-holland. Disponível em: <https://deepblue.lib.umich.edu/handle/2027.42/27079>. Acesso: 7 set. de 2019.

BUDYNAS, R. G.; NISBETT, J. K. *Elementos de Máquinas de Shigley*. 2016. Editora Bookman. 10ª ed.

CANDIDO, Lucas Micheletto. *Análise da Influência da Microestrutura na Otimização Topológica da Rigidez de uma Estrutura*. 2017. Monografia (Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul). Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/165127>. Acesso: 7 set. de 2019.

CHIAVENATO, Idalberto. *Introdução à teoria geral da administração*. 2003. 7ª edição. Editora Elsevier.

COUTINHO, Karilany Dantas. *Método de otimização topológica em estruturas tridimensionais*. 2006. Dissertação. (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Disponível em: repositorio.ufrn.br/jspui/handle/123456789/15665. Acesso: 7 set. de 2019.

GOULART, José Dinarte Vieira. *Otimização topológica de uma engrenagem cilíndrica de dentes retos*. 2017. Projeto de Graduação apresentado ao Departamento de Engenharia Mecânica da PUC–Rio. Disponível em: <https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/31568/31568.PDF>. Acesso 27 maio de 2019.

GUILERME, Carlos Eduardo Marcos. *Otimização topológica e cálculo do gradiente de forma para estruturas submetidas à restrição de fadiga*. 2006. Tese. (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/11960>. Acesso: 5 set. de 2020.

HIBBELER, R.C. *Estática: mecânica para engenharia*. 12ª ed. São Paulo. Editora Pearson.

LANES, Ricardo Moraes. *Investigação de um método de otimização topológica evolucionária desenvolvido em script*. 2013. Dissertação de mestrado em engenharia mecânica. Universidade Federal de Minas Gerais. Disponível em: <http://www.pos.dees.ufmg.br/defesas/760M.PDF>. Acesso: 8 out. de 2019.

LAUGHLIN, Trevor. *Topology Optimization in a World of Fields and Implicit Geometry*. Disponível em: <https://ntopology.com/>. Acesso: 15 set. de 2019.

LIMA, Rafael Augusto de; SILVA, Emílio Carlos Nelli. *Projeto de biela para motor a combustão interna utilizando o método da otimização topológica*. 2018. Design of a connecting rod for internal combustion engine by applying the topology optimization method. Disponível em: docplayer.com.br/68996407-Projeto-de-biela-para-motor-a-combustao-interna-utilizando-o-metodo-da-otimizacao-topologica.html. Acesso: 7 set. de 2019.

LOTTI, Raquel S.; Machado, André Wilson; MAZZIEIRO, Ênio Tonani; LANDRE, Janes Júnior. *Aplicabilidade científica do método dos elementos finitos*. 2006. Disponível em: www.scielo.br/scielo.php?pid=S1415-54192006000200006&script=sci_abstract&tlng=pt. Acesso: 10 set. de 2019.

MELCONIAN, Sarkis, *Elementos de máquinas*. 2014. 10ª Edição. Editora Érica.

NORMA DIN 6885. *Tabela 7 – Chavetas planas*. 2011. Disponível em: <http://joinville.ifsc.edu.br/~geraldo.reis/Materal%20did%C3%A1tico/Elementos%20de%20Maquinas/Tabelas%20T%C3%A9cnicas/Tabela%206%20-%20Chavetas%20e%20toler%C3%A2ncias.pdf>. Acesso: 10 maio de 2022.

NORTON, Robert L. *Projeto de máquinas: uma abordagem integrada*. 2013. 4 Edição. Editora Bookman.

PIMPALTE, Vaibhav; SHILWANT, S.C. *Topology Optimization of Gears from Two Wheeler Gear Set Using Parametric Study*. 2017. Disponível em: <https://www.iosrjournals.org/iosr-jmce/papers/vol14-issue1/Version-2/D1401022231.pdf>. Acesso: 15 jul. de 2022.

PLM Technology. *Optimized and Designed in CATIA and SIMULIA 3DExperience with Functional Generative Design*. 2019. Disponível em: <https://grabcad.com/library/bracket-topology-optimization-5-1>. Acesso 10 nov. de 2019.

PROVENZA, Francesco. *Desenhista de máquinas*. 1991. Escola PROTEC. 46ª Edição. Editora F. Provenza.

Ramadani, R.; Belsak, A.; Kegl, M.; Predan, J. & Pehan, S. *Topology optimization based design of lightweight and low vibration gear bodies*. 2018. [International Journal of Simulation Modelling](https://www.researchgate.net/publication/323782286_Topology_Optimization_Based_Design_of_Lightweight_and_Low_Vibration_Gear_Bodies) 17(1):92-104
DOI: [10.2507/IJSIMM17\(1\)419](https://doi.org/10.2507/IJSIMM17(1)419). Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/323782286_Topology_Optimization_Based_Design_of_Lightweight_and_Low_Vibration_Gear_Bodies. Acesso: 9 jul. de 2022.

SANCHES, R. P. *Otimização estrutural evolucionária usando malhas hexagonais*. 2011. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas – Unicamp, Campinas, 2011. Disponível em: <http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/265152>. Acesso 4 ago. de 2019.

SANT'ANNA, H. M. *Otimização topológica de estruturas bidimensionais contínuas submetidas a restrições de flexibilidade e tensão*. 2002. Dissertação. (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2002. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/3773>. Acesso: 4 ago. de 2019.

SIMONETTI, Hélio Luiz; ALMEIDA, Valério Silva; NEVES, Francisco de Assis das; ALMEIDA, Vírgil Del Duca; OLIVEIRA NETO Lutgardes de. *Reliability-Based Topology Optimization: An Extension of the SESO and SERA Methods for Three-Dimensional Structures*. 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.3390/app12094220>. Acesso: 27 maio 2022.

SILVA, Emílio Carlos Nelli. *Técnicas de Otimização Aplicadas no Projeto de Peças Mecânicas*. 2018. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos Escola Politécnica da USP. Disponível em: sites.poli.usp.br/d/pmr5215/. Acesso: 15 set. de 2019.

SORIANO, Humberto Lima. *Elementos Finitos – Formulação e Aplicação na Estática e Dinâmica das Estruturas*. 2009. Rio de Janeiro. Editora Ciência Moderna.

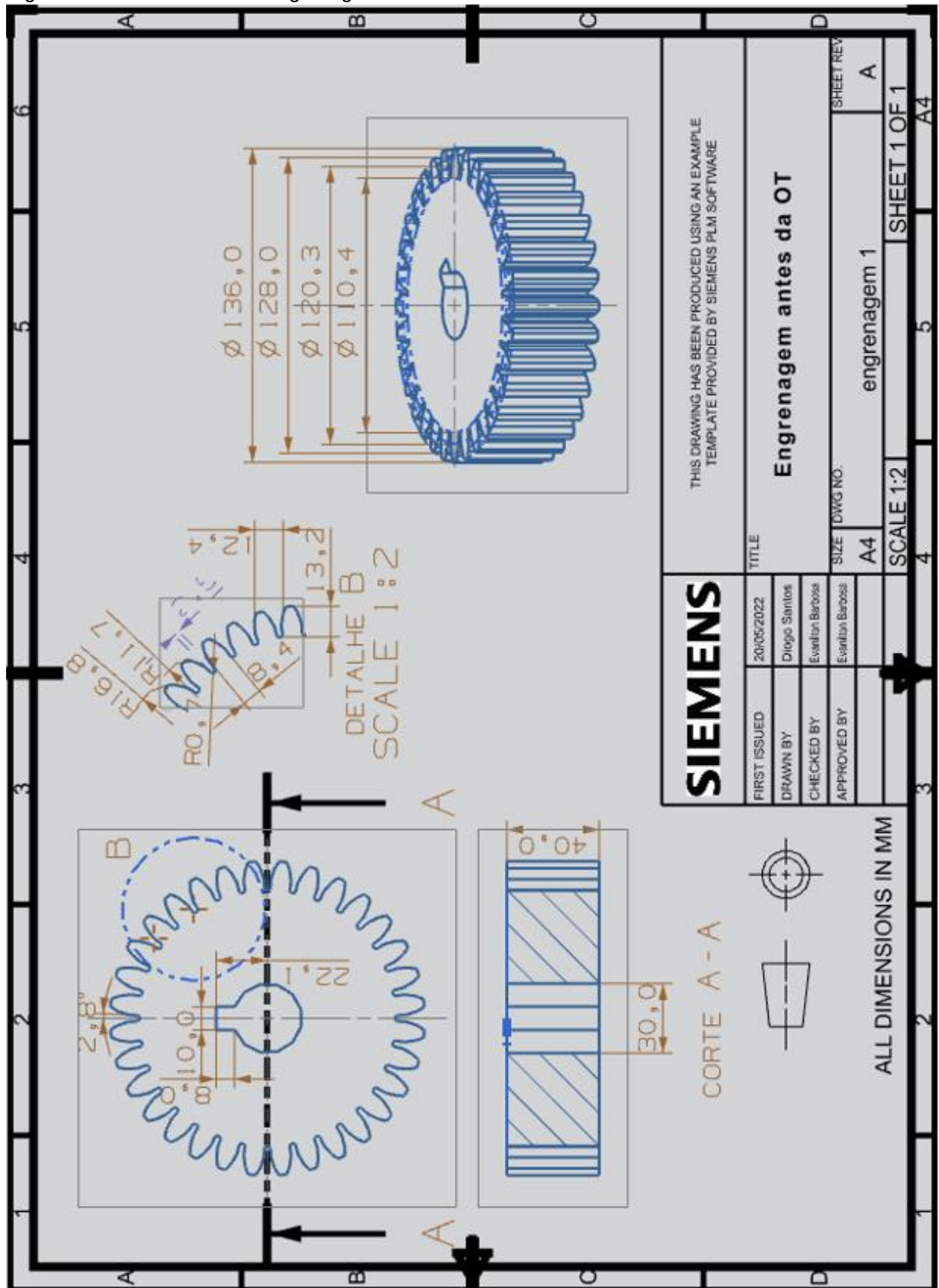
USP. *Dimensões de chavetas em função do diâmetro do eixo*. 2013. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4332587/mod_resource/content/0/D TMI_aula11_comp_transmissao-2.pdf. Acesso: 27 maio de 2022.

VIJAYARAJA, S; VIJAYARAGAVAN, S. *Finite element analysis of critical components of the 2.6L gasoline engine*. 2008. AVTEC. Disponível em: https://www.altairuniversity.com/wp-content/uploads/2016/08/01_FEM_FEA_Finite_Element_Analysis_of_Critical_Components_Avtec_Limited.pdf. Acesso: 7 set. de 2019.

VITORIO, Paulo Cezar Junior. *Análise level set da otimização topológica de estruturas planas utilizando o método de elementos de contorno*. 2014. Dissertação. (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal de São Carlos. Disponível: www.teses.usp.br/teses/disponiveis/18/18134/tde-24092014-150115/en.php. Acesso: 7 set. de 2019.

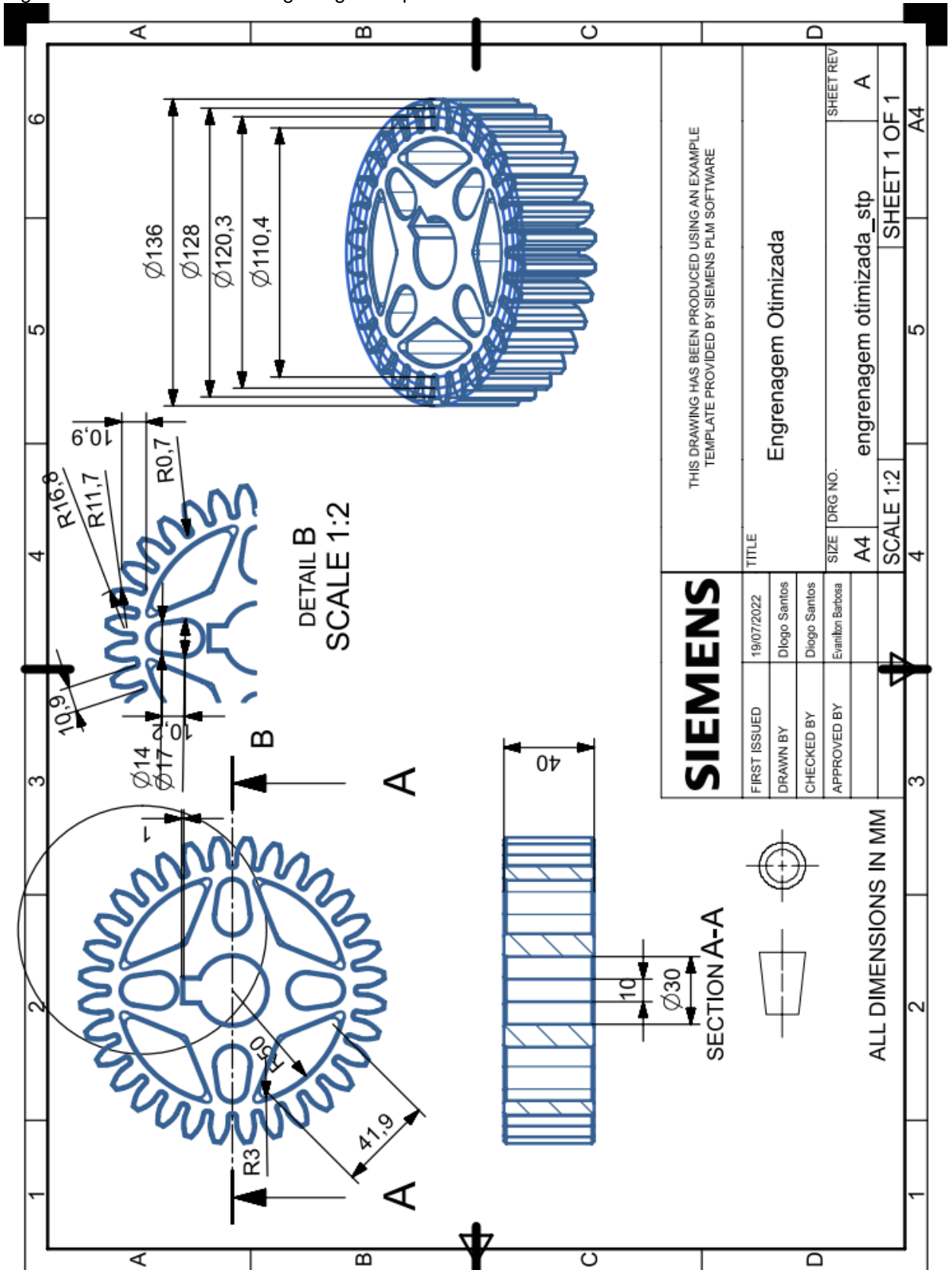
6. APÊNDICE

Figura 27: Detalhamento da engrenagem antes da OT.



FONTE: Próprio autor no software NX Unigraphics.

Figura 28: Detalhamento da engrenagem depois da OT.



FONTE: Próprio autor no software NX Unigraphics.